

数 学

(問 題)

2007年度

〈2007 H19010015 (数学)〉

注 意 事 項

1. 問題冊子および記述解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. 受験番号および氏名は、試験が開始してから、解答用紙の所定欄（2か所）に正確に丁寧に記入すること。
5. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
6. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の にあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ。

- (1) 3で割ると2余り, 5で割ると3余り, 11で割ると9余る正の整数のうちで, 1000を超えない最大のものは ア である。
- (2) 3辺の長さが5, 12, 13である三角形において, 長さが12, 13である2辺によってはさまれる角の大きさを θ とする。このとき, $n^\circ < \theta < (n+1)^\circ$ となる整数 n は イ である。
- (3) $a > 0$ とする。 $f(x)$ を, 閉区間 $[0, a]$ で連続な実数値関数で,
 $f(x) + f(a-x) \neq 0$ ($0 \leq x \leq a$)とする。
$$\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = b$$
のとき, $\int_{\frac{a}{2}}^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx$
の値は ウ である。
- (4) 整数係数の多項式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りを,
 $a, f(a), f'(a)$ を使って表すと エ である。

2 xyz -座標空間内の点

A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1), D(0, 1, 1),

E(0, 0, 0), F(1, 0, 0), G(1, 1, 0), H(0, 1, 0)

を頂点とする1辺の長さが1の立方体を考える。辺BF上に1点Pをとり,
線分BPの長さを a とする。3点A, G, Pを通る平面によるこの立方体の
切断面の面積を a を用いて表せ。

- 3 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC の辺 BC を n 等分する分点を順に $B = P_0, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n = C$ とする。また, 三角形 $AP_{i-1}P_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) の面積を S_i とする。

- (1) a を正の定数とするととき, 次の関数の導関数を求めよ。

$$f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (AP_{i-1} + P_{i-1}P_i + AP_i)S_i$

を求めよ。ただし, 平面上の 2 点 P, Q を結ぶ線分の長さを PQ で表す。

- 4 次の問いに答えよ。

- (1) $a \geq 1, b \geq 1$ のとき, 次の不等式が成立することを示せ。

$$(a^2 - \frac{1}{a^2}) + (b^2 - \frac{1}{b^2}) \geq 2(ab - \frac{1}{ab})$$

- (2) $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ のとき, 次の不等式が成立することを示せ。

$$(a^3 - \frac{1}{a^3}) + (b^3 - \frac{1}{b^3}) + (c^3 - \frac{1}{c^3}) \geq 3(abc - \frac{1}{abc})$$

[以 下 余 白]