

数 学

(問 題)

2007年度

〈2007 H19013620〉

注 意 事 項

1. 問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～6ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁およびマーク解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルでマークすること。
4. 氏名は、試験開始後、マーク解答用紙の所定欄に、正しくていねいに記入すること。
5. 問1から問4までの **ア** , **イ** , **ウ** , …にはそれぞれ, $-49, -48, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 48, 49$ のいずれかが当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙の**ア**, **イ**, **ウ**, …で示された欄にマークして答えること。
例. **ア**に3, **イ**に-5, **ウ**に30, **エ**に-24, **オ**に0と答えたいとき。

	—	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. マーク欄ははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようによく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い

7. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答を止め、筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。
9. いかなる場合でも、マーク解答用紙は必ず提出すること。

問 1.

(1) p は正の実数とする. x についての 3 次方程式

$$x^3 - 2x^2 + (p+1)x - p = 0$$

が 3 つの異なる実数解 x_1, x_2, x_3 をもち, さらにこれらの解 x_1, x_2, x_3 からなる数列が等比数列であるとする. このとき,

$$p = \boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$$

である. また, この数列のとりうる公比のなかで最も大きいのは $\frac{\boxed{\text{ウ}} + \sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{2}$ である.

(2) $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $180^\circ < \omega < 360^\circ$ とする. x についての 3 次方程式

$$x^3 + \left(1 + 2\cos\frac{\theta}{3}\right)x^2 + \left(1 + 2\cos\frac{\theta}{3}\right)x + 1 = 0$$

が 2 つの複素数解 $z_1 = r\cos\omega + ir\sin\omega$, $z_2 = r\cos\omega - ir\sin\omega$ をもつとき, $r = \boxed{\text{エ}}$ である.

ただし, r は正の実数とし, i は虚数単位とする. また, $\cos\omega$ が最大になるのは $\omega = \left(15 \times \boxed{\text{オ}}\right)^\circ$ のときである.

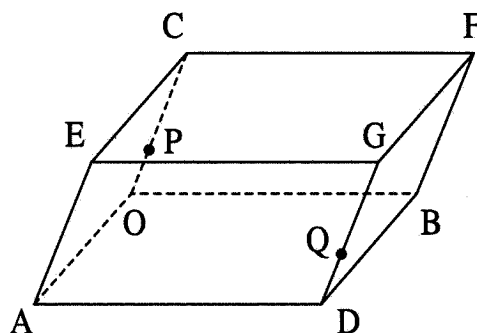
(3) 2 次関数 $f(x)$ と 3 次関数 $g(x)$ に対し, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフはともに点 $P(2, 0)$ で x 軸に接し, かつどちらも点 $Q(0, 2)$ を通るとする. さらに, $y = g(x)$ のグラフが点 $R(4, 0)$ も通るとき,

$$f(x) = \frac{1}{\boxed{\text{カ}}}x^2 + \boxed{\text{キ}}x + 2,$$

$$g(x) = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \left(x^3 + \boxed{\text{ケ}}x^2 + \boxed{\text{コ}}x + \boxed{\text{サ}} \right)$$

である.

問2. OA, OB, OC を3辺とする下のような平行六面体 $OADB-CEGF$ において、点 P を $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6} \overrightarrow{OC}$ となるようにとり、点 Q を $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DG}$ となるようにとり、また、線分 PQ と平面 ABC の交点を R とする。



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{\boxed{\text{シ}}} \vec{c}.$$

点 R は線分 PQ 上にあるから $\overrightarrow{PR} = k\overrightarrow{PQ}$ をみたす実数 k がある。したがって、

$$\overrightarrow{OR} = k\vec{a} + k\vec{b} + \left(\frac{1}{\boxed{\text{シ}}} k + \frac{1}{6} \right) \vec{c}. \quad (1)$$

また、点 R は平面 ABC 上にあるから

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = (\boxed{\text{ス}} - s - t) \vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad (2)$$

をみたす実数 s, t がある。4点 O, A, B, C は同一平面上にないから (1), (2) により、

$$k = \frac{2}{\boxed{\text{セ}}}.$$

したがって

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{\boxed{\text{セ}}} \vec{a} + \frac{2}{\boxed{\text{セ}}} \vec{b} + \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}} \vec{c}$$

である。

つぎに線分 DR と平面 ABE の交点を S とすると、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{\boxed{\text{タ}}} \vec{a} + \frac{1}{\boxed{\text{タ}}} \vec{b} + \frac{1}{\boxed{\text{チ}}} \vec{c}$$

である。

問 3. $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 5a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義された数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ を考える.
ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

(1) $\log_{10} a_n > 6.99$ をみたす最小の自然数 n は である.

(2) a_n の桁数が 100 桁であるような最大の自然数 n は $100 +$ である.

(3) $b_n = \sum_{k=1}^n \log_{10} a_k$ とする. $b_n > 200$ をみたす最小の自然数 n は である.

(4) (3) の b_n に対して, $c_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とする. $\log_{10} (c_n \cdot \log_5 10) > 1$ をみたす最小の自然数 n は である.

問 4. xy 平面において, 中心 $O(0,0)$, 半径 1 の円 C_1 と中心 $A(8,0)$, 半径 3 の円 C_2 を考える. 円 C_1 と円 C_2 にともに接する直線を, 傾きが小さい方から順に l_1, l_2, l_3, l_4 としたとき,

直線 l_2 の方程式は

$$x + \sqrt{\text{ニ}} y + \text{ヌ} = 0,$$

直線 l_4 の方程式は

$$x - \sqrt{\text{ネ}} y + \text{ノ} = 0.$$

いま, 直線 l_1 と円 C_1 の接点を B とする. x についての 2 次関数 $f(x) = a(x-b)^2 + c$ のグラフは直線 l_1 と点 B で接し, かつ直線 l_4 とも接するとする. このとき,

$$a = \frac{1}{\sqrt{\text{ハ}}}, b = \text{ヒ}, c = \frac{\sqrt{3}}{\text{フ}}$$

である. さらに, 2 直線 l_1, l_4 および $y = f(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積は $\frac{\sqrt{3}}{\text{ヘ}}$ である.

[以 下 余 白]

