

数 学

問 題

2007年度

〈 H19010017〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 試験終了の指示がでたら，すぐに解答を止め，筆記具を置いてください。終了の指示に従わず解答を続けた場合は，答案のすべてを無効とするので注意してください。
8. 問題冊子は持ち帰ってください。
9. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] 複素数 α, β ($\alpha, \beta \neq 0$) に対して, $p_1 = 3$ を初項とする数列 $\{p_n\}$ を

$$p_n = 1 + \alpha^{n-1} + \beta^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。以下の問に答えよ。

(1) $p_2 \neq 0, p_4 \neq 0$ のどちらかが成立することを示せ。

(2) 数列 $\{p_n\}$ がさらに次の条件をみたすとする。

(*) 隣接する 2 項の積はすべて 0 となる。すなわち

$$p_n p_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき α, β および p_n の値を求めよ。

[II] 定数 c に対して行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

で定め, 直線 $y = x + 1$ 上の動点 $P(t-1, t)$ を A によって移動した点を Q とする。すなわち,

$$A \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

に対応する点を Q とする。定点 R とすべての t の値に対して, $\triangle PQR$ は P を直角の頂点とする直角三角形となるという。以下の問に答えよ。

(1) 定点 R の座標および定数 c の値を求めよ。

(2) 三角形 PQR の外接円の面積の最小値と, そのときの t の値を求めよ。

[III] 曲線 $y = e^{-x}$ と $y = e^{-x} |\cos x|$ で囲まれた図形のうち, $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ をみたす部分の面積を a_n とする ($n = 1, 2, 3, \dots$)。以下の問に答えよ。

(1) $\int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x}(p \sin x + q \cos x) + C$ をみたす定数 p, q を求めよ。

ただし, C は積分定数である。

(2) a_1 の値を求めよ。

(3) a_n の値を求めよ。

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ を求めよ。

[IV] n を正の整数とすると、以下の問に答えよ。

(1) k を正の整数とする。関数 $(1-x)^n x^k$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を a_n とするとき、 a_n および $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(2) $f(x), g(x)$ を $0 \leq x \leq 1$ において定められた連続関数とする。関数 $(1-x)^n f(x), (1-x)^n g(x), (1-x)^n \{f(x) + g(x)\}$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値をそれぞれ b_n, c_n, d_n とする。このとき $0, b_n + c_n, d_n$ の大小を

$$\boxed{} \leq \boxed{} \leq \boxed{}$$

の形式で答え、その理由を述べよ。

(3) $p, q, r \geq 0$ を定数、 $f(x) = px^2 + qx + r$ とし、関数 $(1-x)^n f(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における最大値を e_n とする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$ を求めよ。

[V] xy 平面において、点 $(5\sqrt{3}, 0)$ を中心とする半径 5 の円を C 、点 $(-4\sqrt{3}, 0)$ を中心とする半径 4 の円を D とする。 C, D の共通接線のうち、 C, D が異なる側にあり傾きが正であるものを ℓ 、傾きが負であるものを ℓ' とし、 C, D が同じ側にあり傾きが正であるものを m とする。以下の問に答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 直線 m の方程式を求めよ。

(3) 三直線 ℓ, ℓ', m のすべてに接し C, D と異なる円を E, E' とする。二円 E, E' の中心の x 座標を求めよ。

(4) (3) の円 E, E' の半径を求めよ。

[以下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。