

問1

$$\log_{\sqrt{a}} x = 1 + \log_a y \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) $x > 0, y > 0, a > 0, a \neq 1$ のとき

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \frac{\log_a x}{\log_a \sqrt{a}} = \log_a a + \log_a y$$

$$\Leftrightarrow 2\log_a x = \log_a (ay)$$

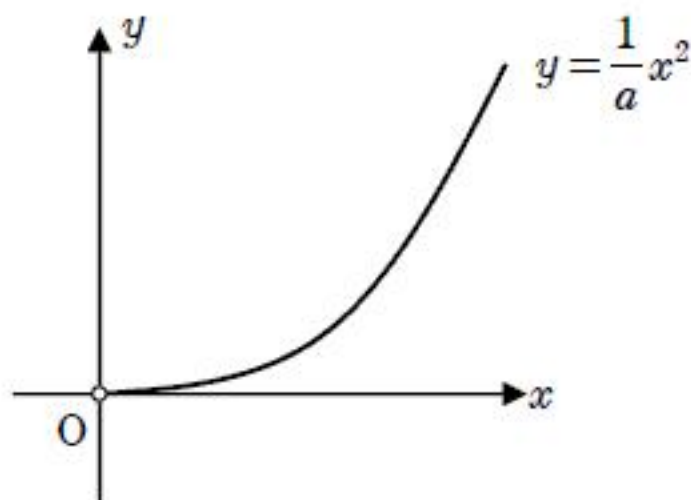
$$\Leftrightarrow \log_a x^2 = \log_a (ay)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = ay$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{a}x^2$$

から、

$$y = \frac{1}{a}x^2, \quad x > 0 \quad \cdots \text{答え}$$



(2) $x - y = k$ とおき、直線 $y = x - k$ が(1)の答えである放物線の一部と共有点をもつための k の範囲を調べればよい。よって、

$$x^2 = a(x - k)$$

が実数解を持つ条件を考えて、

$$a^2 - 4ak \geq 0$$

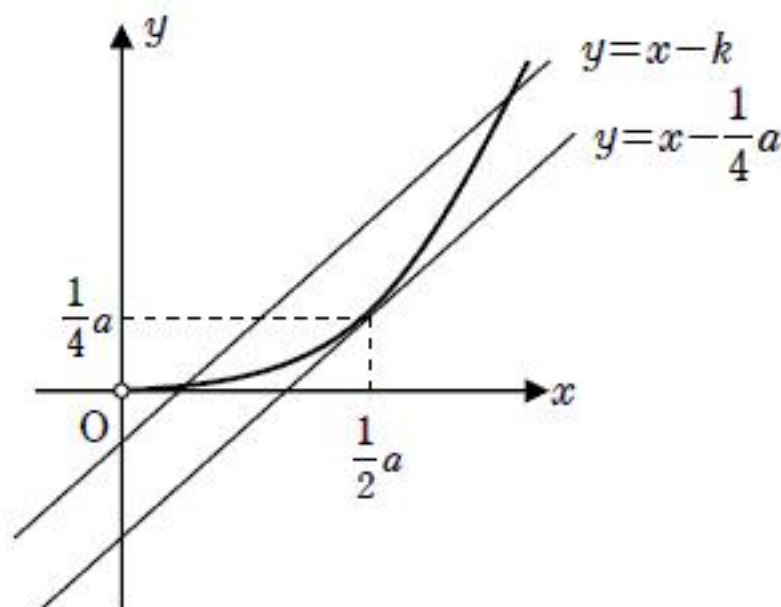
$$\Leftrightarrow k \leq \frac{1}{4}a$$

を満たす。この範囲で右図のように直線と放物線は常に共有点を持つので $x - y$ の最大値は、

$$\frac{1}{4}a \quad \cdots \text{答え}$$

またそのときの x, y の値は

$$x = \frac{1}{2}a, \quad y = \frac{1}{4}a \quad \cdots \text{答え}$$



別解

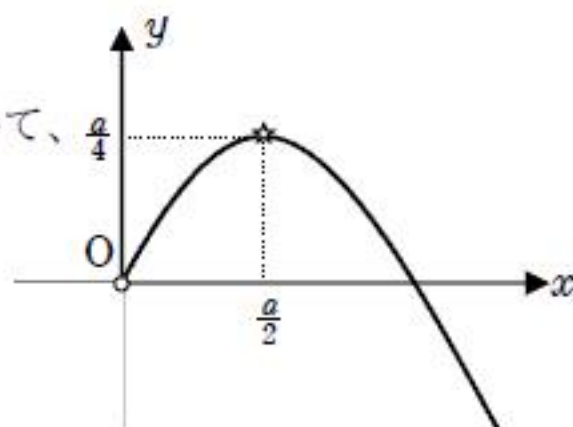
$x > 0$ のとき、

$$x - y = x - \frac{1}{a}x^2 = -\frac{1}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a}{4} \text{ について、}$$

右図から

$$x = \frac{1}{2}a \left(y = \frac{1}{4}a \right) \text{ で最大値 } \frac{1}{4}a \text{ をと}$$

ることが分かる。



問2

$|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{c}|=3, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ を満たす。

(1) 条件より

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \vec{OK} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

と書ける。よって、

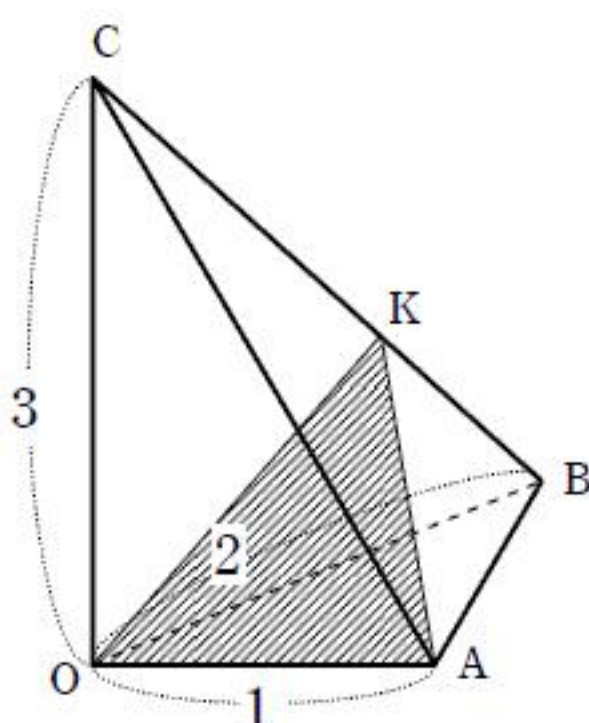
$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{k} &= \vec{a} \cdot \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \\ &= (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} + t\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 0 \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}|\vec{k}|^2 &= |(1-t)\vec{b} + t\vec{c}|^2 \\ &= (1-t)^2|\vec{b}|^2 + 2(1-t)t\vec{b} \cdot \vec{c} + t^2|\vec{c}|^2 \\ &= (1-t)^2 \times 2^2 + 0 + t^2 \times 3^2 \\ &= 13t^2 - 8t + 4\end{aligned}$$

から、

$$|\vec{k}| = \sqrt{13t^2 - 8t + 4} \quad \cdots \text{答え}$$



(2) 三角形 OAK, 三角形 HAO, 三角形 HOK について、

全て直角三角形であり、

$$\angle OAK = \angle HAO = \angle HOK$$

なので 2 角相等で相似。

よって対応する辺の比は等しいので、

$$AO : OK = AH : HO = OH : HK$$

つまり

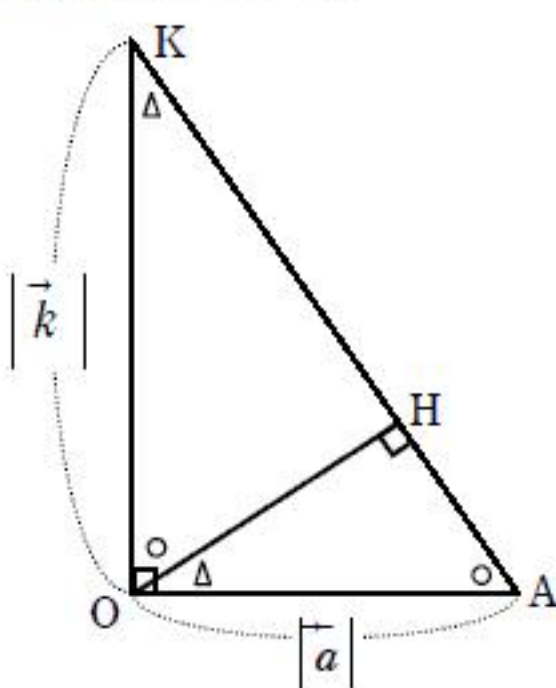
$$|\vec{a}| : |\vec{k}| = AH : HO = OH : HK$$

が成立するから、

$$OH = \frac{|\vec{k}|}{|\vec{a}|} AH, \quad OH = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{k}|} HK$$

より、

$$AH : HK = |\vec{a}|^2 : |\vec{k}|^2 \quad \cdots \text{答え}$$



別解

$$\triangle HOA \sim \triangle HKO, \text{ 相似比は } OA : KO = |\vec{a}| : |\vec{k}| \text{ なので面積比は } |\vec{a}|^2 : |\vec{k}|^2$$

$$\text{よって、} AH : HK = |\vec{a}|^2 : |\vec{k}|^2 \quad \cdots \text{答え}$$

(3) (2)の結果より、

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= \frac{|\vec{k}|^2 \vec{OA} + 1 \cdot \vec{OK}}{1 + |\vec{k}|^2} \\ &= \frac{(13t^2 - 8t + 4)\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC}}{1 + (13t^2 - 8t + 4)} \\ &= \frac{(13t^2 - 8t + 4)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}}{13t^2 - 8t + 5} \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

(4) $13t^2 - 8t + 4 = s \quad \cdots \text{①}$ とおく。

$OH \perp \text{平面 } ABC$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \{s\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \\ \{s\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0 \end{cases}$$

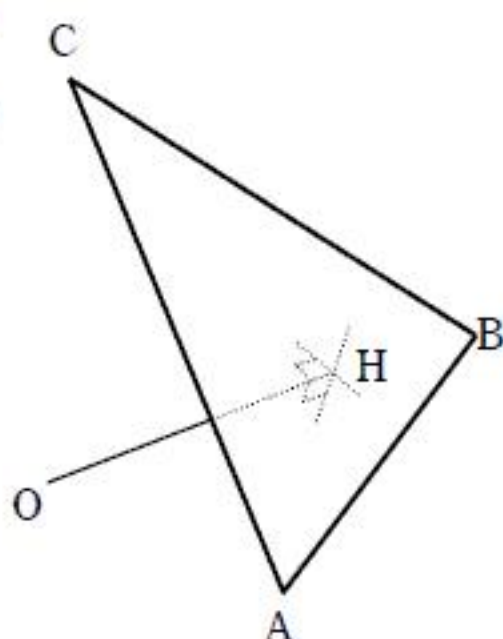
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -s|\vec{a}|^2 + (1-t)|\vec{b}|^2 = 0 \\ -s|\vec{a}|^2 + t|\vec{c}|^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -s + 4(1-t) = 0 \\ -s + 9t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{36}{13} \\ t = \frac{4}{13} \end{cases}$$

これは①も満たす。以上より、

$$t = \frac{4}{13} \quad \cdots \text{答え}$$



※この問題では(2)で $OH \perp AK$ であり、 $\vec{AK}$ と $\vec{AC}$ (または $\vec{AB}$) は一次独立なので

$\vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0$ の条件だけでもよい。すると、

$$\begin{aligned}-s + 9t &= 0 \Leftrightarrow s = 9t \\ &\Leftrightarrow 13t^2 - 8t + 4 = 9t \\ &\Leftrightarrow (13t - 4)(t - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{4}{13}, 1\end{aligned}$$

$0 < t < 1$ より、 $t = \frac{4}{13}$ と出る。

問3

$f(\theta) = 2\{(a-1)\sin^2\theta + a\sin\theta\cos\theta + (a+1)\cos^2\theta\}$ について、

(1)

$$\begin{aligned}f(\theta) &= 2(a-1)\sin^2\theta + 2a\sin\theta\cos\theta + 2(a+1)\cos^2\theta \\&= 2(a-1)\frac{1-\cos 2\theta}{2} + a \cdot \sin 2\theta + 2(a+1)\frac{1+\cos 2\theta}{2} \\&= a\sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 2a \quad \cdots \text{答え}\end{aligned}$$

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ から $0^\circ \leq 2\theta \leq 360^\circ \quad \cdots \textcircled{1}$ である。

$$f(\theta) = \sqrt{a^2+4}\sin(2\theta+\alpha) + 2a, \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{a^2+4}}, \quad \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$$

と合成でき、 $\textcircled{1}$ の範囲から $\sin(2\theta+\alpha) = \pm 1$ を満たす θ は存在する。

よって $f(\theta)$ は

$$\text{最大値} \quad \sqrt{a^2+4} \times 1 + 2a = \sqrt{a^2+4} + 2a$$

$$\text{最小値} \quad \sqrt{a^2+4} \times (-1) + 2a = -\sqrt{a^2+4} + 2a$$

をとる。よって条件から

$$\left(\sqrt{a^2+4} + 2a\right) - \left(-\sqrt{a^2+4} + 2a\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+4} = 5$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 4 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow a = \pm \frac{3}{2}$$

$$a > 0 \text{ なので、} a = \frac{3}{2} \quad \cdots \text{答え}$$

またこのとき、 $f(\theta)$ の最大値は、

$$\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{11}{2} \quad \cdots \text{答え}$$

問 4

$$a_3 = 12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$S_8 > 0, \quad S_9 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(1) $a_n = a + d(n-1)$ と書けるよって、

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow a + 2d = 12$$

$$\Leftrightarrow a = 12 - 2d$$

よって、

$$a_n = 12 + d(n-3)$$

となる。このとき、

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8(a_1 + a_8)}{2} > 0 \\ \frac{9(a_1 + a_9)}{2} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_8 > 0 \\ a_1 + a_9 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 24 + 3d > 0 \\ 24 + 4d \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -8 < d \leq -6 \quad \cdots \text{答え}$$

(2) (1)の結果から、 $n > 3$ のとき、

$$12 - 8(n-3) < 12 + d(n-3) \leq 12 - 6(n-3)$$

$$\Leftrightarrow 36 - 8n < a_n \leq 30 - 6n \quad \cdots \text{答え}$$

(3) $a_n > 0, \quad a_{n+1} \leq 0$

となる n について、(2)の結果から

$$\begin{cases} 0 < 36 - 8n \\ 30 - 6(n+1) \leq 0 \end{cases}$$

が必要。よって、

$$\begin{cases} n < \frac{9}{2} \\ 4 \leq n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq n < \frac{9}{2}$$

これと n が自然数であることとで、

$$n = 4 \quad \cdots \text{答え}$$

$$(4) \quad S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\{24 + d(n-5)\}}{2}$$

$-8 < d \leq -6$ なので数列 a_n は減少数列であり、(3)の結果から

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > 0 \geq a_5 > a_6 > \cdots$$

となるので、 S_n が最大となるのは、

S_n が $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ と同じ値となるとき

である。よって a_5 が 0 のとき、

$$a_5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -6$$

$$\text{なので、} S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n\{24 + d(n-5)\}}{2} \text{ について}$$

$d = -6$ のとき、

$$S_n = n(27 - 3n) \text{ は } n = 4, 5 \text{ で最大となる。} \quad \cdots \text{答え}$$

$-8 < d < -6$ のとき、

$$S_n \text{ は } n = 4 \text{ で最大となる} \quad \cdots \text{答え}$$

いずれにせよそのときの S_n は、

$$S_n = 2(24 - d) \text{ と表せる} \quad \cdots \text{答え}$$