

1

ア	イ	ウ	エ
213	$1 + \frac{\pi}{6} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\left(\frac{6\sqrt{3}}{7}, \frac{9}{7} \right)$	$2\sqrt{10} + 2\sqrt{2}$

- (1) $f(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ とおく。この関数は偶関数なので、一般性を失うことなく、 $x \geq 0$ と仮定してよい。2 階まで微分をとると、

$$f'(x) = x - \sin x$$

$$f''(x) = 1 - \cos x$$

となる。ここで、 $|\cos x| \leq 1$ に注意すると、任意の x について $f''(x) \geq 0$ であり、 $f'(x)$ は非減少関数(増加関数)である。よって、 $x \geq 0$ なる任意の x について、

$$f'(x) \geq f'(0) = 0$$

が成立するので、 $f(x)$ は $x \geq 0$ で非減少である。 $f(0) = 0$ であることから、結論を得る。

- (2) 問題の不等式の左辺を $g_n(x)$ とおいて、以下 n に関する帰納法で、任意の n と x に対して、 $g_n(x) \geq 0$ となることを示す。なお、 $g_n(x)$ は偶関数であるので、 $x \geq 0$ と仮定してよいことに注意する。

- (i) $n=1$ のときは、 $g_1(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$ であるので、(1)の結果から、

$$g_1(x) \geq 0 \text{ が言える。}$$

- (ii) $n=m$ のとき、 $g_m(x) \geq 0$ であると仮定する。 $g_{m+1}(x)$ の 2 階までの微分を計算すると

$$\begin{aligned} g'_{m+1}(x) &= (-1)^{m+1} \left(-\sin x - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!} \right) \\ g''_{m+1}(x) &= (-1)^{m+1} \left(-\cos x - \sum_{k=1}^{m+1} \frac{(-1)^k x^{2(k-1)}}{(2k-2)!} \right) \\ &= (-1)^m \left(\cos x - \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= g_m(x) \end{aligned}$$

である。よって、帰納法の仮定より、 $g''_{m+1}(x) \geq 0$ であるので、 $g'_{m+1}(x)$ は非減少関数である。したがって、 $g'_{m+1}(x) \geq g'_{m+1}(0) = 0$ がわかるので、 $g_{m+1}(x)$ も非減少関数である。 $g_{m+1}(0) = 0$ であるので、 $g_{m+1}(x) \geq 0$ が示された。

以上(i)と(ii)より、任意の n について結論を得る。

- (1) 法線と $y=x^2$ の P 以外の交点を (p, p^2) とすると、法線の方程式は、

$$y = -\frac{1}{2p}x + p^2 + \frac{1}{2}$$

である。これが、 (a, a^2) を通ることから、

$$2p^3 + (1 - 2a^2)p - a = 0 \quad \cdots (*)$$

が得られる。これを因数分解すると、

$$(p-a)(2p^2 + 2ap + 1) = 0$$

であるから、 $2p^2 + 2ap + 1 = 0$ の解について考えればいい。 $p=0, a$ が解になりえないことは代入すれば明らかである。判別式 D を考えると、

$$D/4 = a^2 - 2$$

であるので、

- ・ $D > 0, a > \sqrt{2}$ のとき、 $(*)$ は異なる 3 つの実数解を持つ。
- ・ $D = 0, a = \sqrt{2}$ のとき、 $(*)$ は 2 つの実数解を持つ。
- ・ $D < 0, a < \sqrt{2}$ のとき、 $(*)$ の実数解は $p = a$

とまとめられる。以上より、求める n は

$$n = \begin{cases} 3 & (a > \sqrt{2}) \\ 2 & (a = \sqrt{2}) \\ 1 & (0 < a < \sqrt{2}) \end{cases}$$

である。

- (2) (1)の結果より、 $a = \sqrt{2}$ のとき、 $n = 2$ となることがわかる。この値を $(*)$ に代入して、因数分解すると、

$$(p - \sqrt{2})(\sqrt{2}p + 1)^2 = 0$$

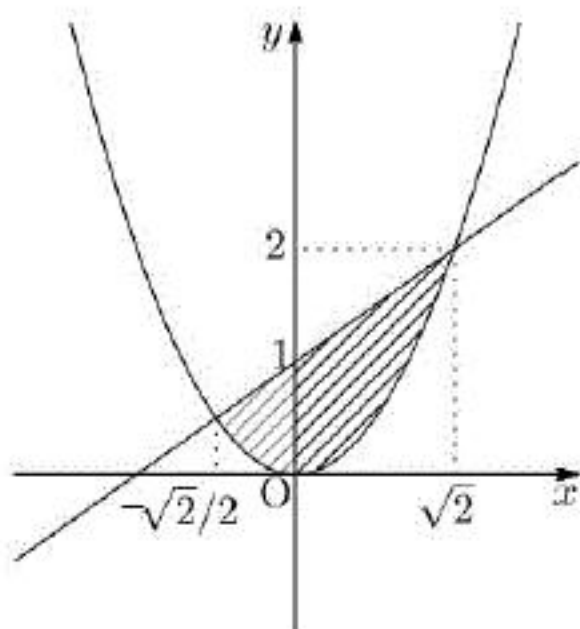
となるので、 $p = \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$ を得る。これらのうち、法線の傾きが大きくな

のは $p = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、その法線の方程式は、

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

となる。よって、 $y = x^2$ とこの法線の関係は図のようになる。

よって、この斜線部分を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V は、



$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi x^2 dy - (\sqrt{2})^2 \pi \times \frac{1}{3} \\ &= \int_0^2 \pi y dy - \frac{2}{3} \pi \\ &= 2\pi - \frac{2}{3} \pi \\ &= \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

である。

- (1) 座標平面上で、正の向きに θ だけ回転させる変換、 y 軸に対する折り返しはそれぞれ、

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書けるので、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。すると、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ y_{n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix} \quad \dots (*)$$

を得る。したがって、 k を整数として、 $n = 2k$ のとき、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + k \sin \theta \\ y_0 + k \cos \theta + k \end{pmatrix}$$

であり、 $n = 2k+1$ のときは、

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + k \sin \theta \\ y_1 + k \cos \theta + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + k \sin \theta \\ x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta + k \cos \theta + k + 1 \end{pmatrix}$$

である。

- (2) (1)で得られた P_{2n} の表式から、 $P_0 \neq P_2$ ならば、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

であり、さらに $P_0, P_2, \dots$ はすべて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta + 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる、実数 t をパラメーターとする直線上にあることがわかる。さらに、

$$\overrightarrow{P_n P_{n+2}} = \vec{a}$$

であるので、 P_n と P_{n+2} の間隔は n によらず一定であることから、結論を得る。

- (3) (2)より、偶数番目の P_n はすべて方向ベクトルが $\vec{a}$ であるような直線上にならぶことがわかる。これは奇数番目の P_n すべてに関しても同様のことが言えている。したがって、問題の条件の必要条件は、 $\vec{a} \neq 0$ であるか、または、 $\overrightarrow{P_0 P_1} = s\vec{a}$ となるような実数 s が存在することである。実際に成分計算してみると、

$$\begin{pmatrix} -\frac{\cos \theta}{2} + \sin \theta - \frac{1}{2} \\ \frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \sin \theta \\ s (\cos \theta + 1) \end{pmatrix} \\ s (\cos \theta + 1) \left(-\frac{\cos \theta}{2} + \sin \theta - \frac{1}{2} \right) = \sin \theta \left(\frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta \right) \\ s (-\cos \theta + \sin \theta - 1) = 0 \\ s \left(\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right) = 0$$

だから、 $s = 0$ または、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$ である。 $s = 0$ だとすると、

$$-\frac{\cos \theta}{2} + \sin \theta - \frac{1}{2} = 0, \frac{\sin \theta}{2} + \cos \theta = 0$$

であるが、第 1 式の $\sin \theta$ 倍と第 2 式の $\cos \theta$ 倍を足せば、 $\frac{1}{2} = 0$ となってしまう矛盾する。よて、 $s = 0$ はありえない。

一方、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき、 P_n の座標は、

$$\left(\frac{n+1}{2}, \frac{n+2}{2} \right)$$

であるから、すべての P_n は $y = x + \frac{1}{2}$ 上にあることがわかる。

$\theta = \pi$ のときは、 $\vec{a} = \vec{0}$ であるので、結局 $P_0, P_2, P_4, \dots$ は一致し、さらに $P_1, P_3, P_5, \dots$ も一致する。この 2 点はそれぞれ $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ と $\left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ なので、こ

れらは $x = \frac{1}{2}$ 上にある。

よって、 $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$ が求めるものである。