

1

(1) $x^3 + \frac{1}{x^3} = 52 \quad \cdots \textcircled{1}$

について、 $x + \frac{1}{x} = t$ とおくと t は実数であり、

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = 52 \\ &\Leftrightarrow t^3 - 3t - 52 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-4)(t^2 + 4t + 13) = 0 \end{aligned}$$

t は実数なので、 $t = 4$ のみ。よって $x + \frac{1}{x} = 4$ であり、

この解は $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解であり、実数解である。このとき、

$$\begin{aligned} x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \\ &= \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x}\right]^2 - 2 \\ &= (4^2 - 2)^2 - 2 \\ &= 194 \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$

(2) 座標平面

xy 平面上に $A\left(\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$, $B(0, 0)$, $C(\sqrt{7}, 0)$ をとり、三角形の内部に

点 $P(x, y)$ をとる。このとき、

$$AP^2 = \left(x - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{21}}{2}\right)^2 = 1$$

$$BP^2 = x^2 + y^2 = 4$$

以上を解いて、

$$y = \frac{3\sqrt{21}}{7}, \frac{2\sqrt{21}}{7} \quad \text{より、} x = -\frac{\sqrt{7}}{7}, \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

点 P は三角形 ABC の内部の点なので $P\left(\frac{4\sqrt{7}}{7}, \frac{2\sqrt{21}}{7}\right)$

このとき $PC^2 = 3$ と計算でき、 $PC = \sqrt{3}$ $\cdots$ 答え

※ A 中心半径 1 の円と B 中心半径 2 の円の交点は 2 つあり、 P は $\triangle ABC$ の内部の方の点
 ※2 定点 A, B からの距離だけで P の位置は決定できるので角度 120° は条件として過剰であるので上記のように出してもよい。もちろん条件のような角度になっていれば、の話ではあるが、実際、 $\angle APB = \theta$ について、 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{\|\overrightarrow{PA}\| \|\overrightarrow{PB}\|} = -\frac{1}{2}$ となるので問題はない。

別解 ベクトル

ベクトルにより $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ として $\overrightarrow{AP} = s\vec{b} + t\vec{c}$ とおける。

このとき、 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{7}$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{7}{2}$ であり、

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 1 \Leftrightarrow 7s^2 + 7t^2 + 7st = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = 4 \Leftrightarrow 7s^2 + 7t^2 + 7st - 14s - 7t + 7 = 4 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より $s = \frac{1}{7}$, $t = \frac{2}{7}$ と出せるので、

$$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{7}(5\vec{c} - \vec{b})$$

よって、

$$|\overrightarrow{PC}|^2 = \left(\frac{1}{7}\right)^2 |5\vec{c} - \vec{b}|^2 = 3$$

から $PC = \sqrt{3}$ $\cdots$ 答え

別解 三角関数

右図において、 $\alpha + \beta = 240^\circ$ であり、

$\triangle PBC$, $\triangle PCA$ で余弦定理から

$$\begin{cases} 7 = 4 + x^2 - 4x \cos \alpha \\ 7 = 1 + x^2 - 2x \cos \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x \cos \alpha = 3 \quad \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - 2x \cos \beta = 6 \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ から

$$x(x - 8 \cos \alpha + 2 \cos \beta) = 0$$

より $x \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x &= 8 \cos \alpha - 2 \cos \beta \\ &= 8 \cos \alpha - 2 \cos(240^\circ - \alpha) \\ &= 9 \cos \alpha + \sqrt{3} \sin \alpha \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

これを $\textcircled{1}$ へ代入して整理すると、

$$\cos \alpha (\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \quad \text{または} \quad \tan \alpha = -\sqrt{3}$$

よって、

$$\alpha = 90^\circ \quad \text{または} \quad \alpha = 120^\circ$$

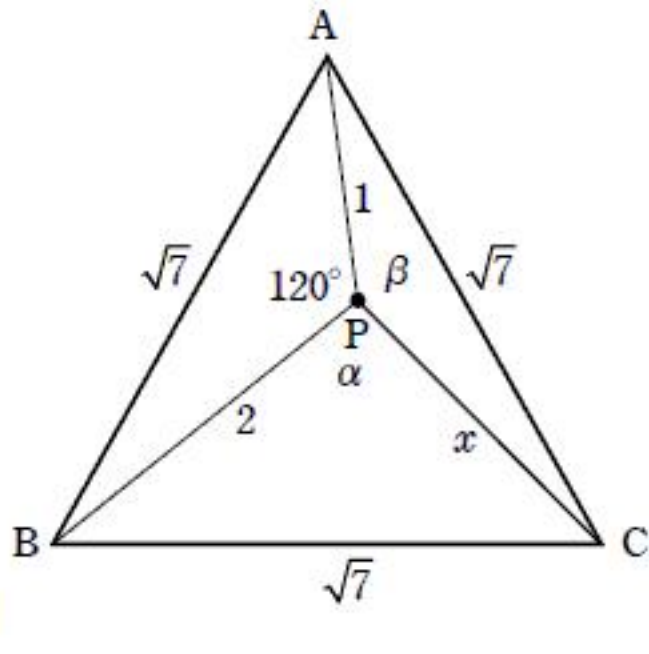
となる。 $\alpha = 120^\circ$ のとき、 $\textcircled{3}$ から $x = -3$ となるので不適。

よって $\alpha = 90^\circ$ なので $\textcircled{3}$ へ代入して

$$x = 9 \cos 120^\circ + \sqrt{3} \sin 90^\circ = \sqrt{3} \quad \cdots \text{答え}$$

※直角三角形 PBC について、

$$PC = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \sqrt{3} \quad \text{と出してもよい。}$$



(3) $p_1, p_2, \dots, p_n$ を異なる素数、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を自然数として任意の正の整数 m は、

$$m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$$

と一意的に素因数分解できる。このときの正の約数の個数は、

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) \text{ 個}$$

と計算できる。そこで 28 を素因数分解し、

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) = 2^2 \times 7$$

を満たす自然数の組 $a_1, \dots, a_n$ を考えると、

$$(a_1 + 1, a_2 + 1) = (2, 14), (4, 7)$$

$$(a_1 + 1, a_2 + 1, a_3 + 1) = (2, 2, 7)$$

の 3 組と、その数字の順番を入れ替えたものである。

今、 m を極力小さい数としたいので、

$$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$$

としてもよい。このとき、全てのパターンを書き出すと、

$$2^1 \cdot 3^{13} > 2^{13} \cdot 3^1$$

$$2^3 \cdot 3^6 > 2^6 \cdot 3^3$$

$$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^6 > 2^1 \cdot 3^6 \cdot 5^1 > 2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^1$$

からこの中で一番小さいものは

$$2^6 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 960 \quad \cdots \text{答え}$$

(4) $f(x) = |x-1| + |2x-1| + |3x-1| + \cdots + |100x-1|$

について、 m を自然数として

区間 $\frac{1}{m+1} \leq x \leq \frac{1}{m} (m=1, 2, \dots, 99)$ を考えると、

$$x-1 < 0, 2x-1 < 0, \dots, mx-1 \leq 0,$$

$$(m+1)x-1 \geq 0, (m+2)x-1 > 0, \dots, 100x-1 > 0$$

なので、

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-1) - (2x-1) - (3x-1) - \cdots - (mx-1) \\ &\quad + \{(m+1)x-1\} + \{(m+2)x-1\} + \cdots + (100x-1) \\ &= -(1+2+3+\cdots+m)x + m \\ &\quad + \{(m+1)+(m+2)+\cdots+100\}x - (100-m) \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{m(m+1)}{2} + \frac{(100-m)\{(m+1)+100\}}{2} \right) x + 2m - 100$$

$$= (5050 - m^2 - m)x + 2m - 100$$

となる。これは各区間直線になっており、今は関数 $f(x)$ の最小値を考えているので

傾き $5050 - m^2 - m$ の正負を調べる。すると、

$$m = 70 \text{ のとき } 5050 - 70^2 - 70 = 5050 - 4970 = 80 > 0$$

$$m = 71 \text{ のとき } 5050 - 71^2 - 71 = 5050 - 5112 = -62 < 0$$

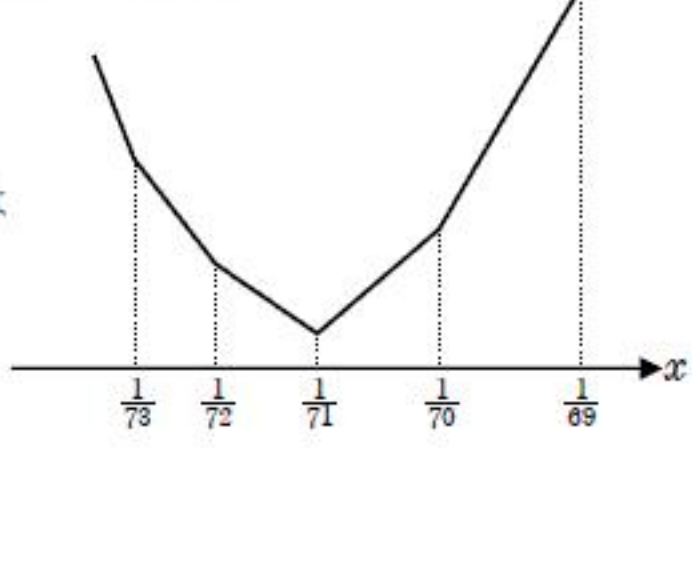
なので、関数 $f(x)$ は、

$$x \leq \frac{1}{71} \text{ で減少, } \frac{1}{71} \leq x \text{ で増加}$$

する関数である。したがって、関数 $f(x)$ は

$$x = \frac{1}{71}$$

で最小となる。 $\cdots$ 答え



※具体的には、
 $\frac{1}{72} \leq x \leq \frac{1}{71}$ で $f(x) = -62x + 42$
 $\frac{1}{71} \leq x \leq \frac{1}{70}$ で $f(x) = 80x + 40$
 などとなる。最小値は $\frac{2920}{71}$ になる。

2

$$(i) \quad a_1 = a$$

$$(ii) \quad a_{n-1} \leq 1 \text{ のとき、 } a_n = \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_{n-1} > 1 \text{ のとき、 } a_n = a_{n-1} - 1$$

$$(1) \quad a_1 = a = \sqrt{2} - 1 \text{ のとき、}$$

$$0 < \sqrt{2} - 1 < 1 \text{ なので } a_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 \quad (i) \text{適用}$$

$$\sqrt{2} + 1 > 1 \text{ なので } a_3 = (\sqrt{2} + 1) - 1 = \sqrt{2} \quad (ii) \text{適用}$$

$$\sqrt{2} > 1 \text{ なので } a_4 = \sqrt{2} - 1 \quad (ii) \text{適用}$$

よって $a_1 = a_4$ となるので、数列 $\{a_n\}$ は周期 3 で

$$\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1, \sqrt{2}$$

をくり返す。したがって、

$$125 = 3 \times 41 + 2$$

の計算から、

$$a_{125} = a_2 = \sqrt{2} + 1 \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \quad a_1 = a, \quad 0 < a < 1 \text{ から } a_2 = \frac{1}{a} > 1 \text{ なので } a_3 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a} \text{ となる。}$$

また、 $a_1 = a_6$ となるには $a_6 = a_5 - 1$ で $1 < a_5 < 2$ となる必要がある。

よって、

$$2 < a_4 < 3 \quad \text{または} \quad \frac{1}{2} < a_4 < 1$$

でなければならない。

$$(i) \quad 2 < a_4 < 3 \text{ のとき、 } 3 < a_3 < 4 \text{ または } \frac{1}{3} < a_3 < \frac{1}{2} \text{ が必要で、}$$

$$(ア) \quad 3 < a_3 < 4 \text{ のとき、}$$

$$3 < \frac{1-a}{a} < 4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < a < \frac{1}{4} \quad \text{であり、このとき}$$

$$a_4 = \frac{1-a}{a} - 1, \quad a_5 = \frac{1-a}{a} - 2, \quad a_6 = \frac{1-a}{a} - 3$$

から、

$$a = \frac{1-a}{a} - 3 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{5}$$

よって、 $a = \sqrt{5} - 2$ のみ成立する。

$$(イ) \quad \frac{1}{3} < a_3 < \frac{1}{2} \text{ のとき、}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1-a}{a} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < a < \frac{3}{4} \quad \text{であり、このとき}$$

$$a_4 = \frac{a}{1-a}, \quad a_5 = \frac{a}{1-a} - 1, \quad a_6 = \frac{a}{1-a} - 2$$

から、

$$a = \frac{a}{1-a} - 2 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{3}$$

よって、 $a = \sqrt{3} - 1$ のみ成立する。

$$(ii) \quad \frac{1}{2} < a_4 < 1 \text{ のとき、 } \frac{3}{2} < a_3 < 2 \text{ が必要で、}$$

$$\frac{3}{2} < \frac{1-a}{a} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < a < \frac{2}{5} \quad \text{であり、このとき}$$

$$a_4 = \frac{1-a}{a} - 1 = \frac{1-2a}{a}, \quad a_5 = \frac{a}{1-2a}, \quad a_6 = \frac{a}{1-2a} - 1$$

から、

$$a = \frac{a}{1-2a} - 1 \Leftrightarrow 2a^2 + 2a - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

よって、 $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ のみ成立する。

以上より、求める a の値は、

$$a = \sqrt{5} - 2, \sqrt{3} - 1, \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad \cdots \text{答え}$$

別解

$$(2) \quad a_2 > 5 \text{ のときを考えると、}$$

$$a_3 = a_2 - 1, \quad a_4 = a_3 - 1, \quad a_5 = a_4 - 1, \quad a_6 = a_5 - 1$$

の計算から、

$$a_6 = a_2 - 4$$

となるが、 $a_2 - 4 > 1$ なので $a_1 \neq a_6$

したがって、 $1 < a_2 \leq 5$ で考えればよい。

$$\text{また } a = \frac{1}{m} \quad (m = 2, 3, 4, 5) \text{ のときを考えると、}$$

$$a_2 = m$$

となるが、このとき

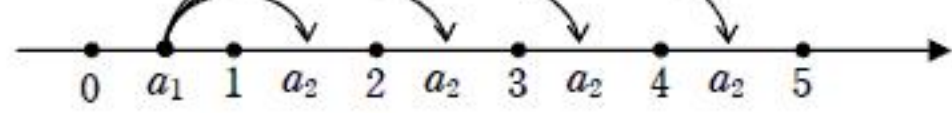
$$a_l = 1$$

を満たす l が $3 \leq l \leq 6$ に存在し、これ以降は不動なので $a_1 = a_6$ を満たすことはない。

よって、

$$1 < a_2 < 2, \quad 2 < a_2 < 3, \quad 3 < a_2 < 4, \quad 4 < a_2 < 5$$

で場合分けして考えることもできる。しかし少し面倒である。



3

$$g(n) \geq 0, \quad f(n) \geq 0, \quad g(99)=1, \quad g(100)=0, \quad f(100)=1$$

$$f(n)+f(n+g(n))=f(n+1) \quad \cdots \ast$$

について

(1) $\ast$ で $n=99$ を代入して、

$$f(99)+f(99+g(99))=f(100)$$

$$\Leftrightarrow f(99)+f(100)=f(100) \quad (\because g(99)=1)$$

$$\Leftrightarrow f(99)=0 \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \quad \ast \Leftrightarrow f(n+1)-f(n)=f(n+g(n))$$

について、条件から

$$f(n+g(n)) \geq 0$$

なので、

$$f(n+1)-f(n) \geq 0$$

が成立、つまり数列 $\{f(n)\}$ は n の非減少数列である。 $\cdots \textcircled{1}$

$$\cdots \leq f(99) \leq f(100) \leq f(101) \leq f(102) \leq \cdots$$

また $\ast$ から、 $n \geq 100$ のとき

$$f(n+1)=f(n)+f(n+g(n))>f(n+g(n)) \quad (\because f(n) \geq 1)$$

であり、 $g(n) \geq 1$ とすると $\textcircled{1}$ に矛盾することから $n \geq 100$ では

$$g(n)=0$$

のみ考えられる。よって $g(101)=0$ である。 $\cdots \text{答え}$

(3) (2)の結果から、 $n \geq 100$ で $g(n)=0$ であるので $n \geq 100$ のとき

$$f(n)+f(n)=f(n+1)$$

$$\Leftrightarrow f(n+1)=2f(n)$$

となり、数列 $\{f(n)\}$ は公比 2 の等比数列をなす。

よって、

$$\begin{aligned} f(n) &= f(100) \times 2^{n-100} \\ &= 2^{n-100} \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} f(2008) &= 2^{2008-100} \\ &= 2^{1908} \quad \cdots \text{答え} \end{aligned}$$