

[I]

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \quad \cdots \textcircled{1} \quad (\text{※これは放物線である})$$

$$x + y = a \quad \cdots \textcircled{2}$$

(1) ①について

$$\sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x & \cdots \textcircled{3} \\ 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

となる。また③から $0 < x < a$ において

$$y' = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{x}} < 0, \quad y'' = \frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}} > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y' = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} y' = 0$$

となるので D の概形は右図のようになる。

※2 曲線の上下関係だけなら

$$(a-x) - (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x) = 2\sqrt{x}(\sqrt{a} - \sqrt{x}) \geq 0$$

だけで把握できる。

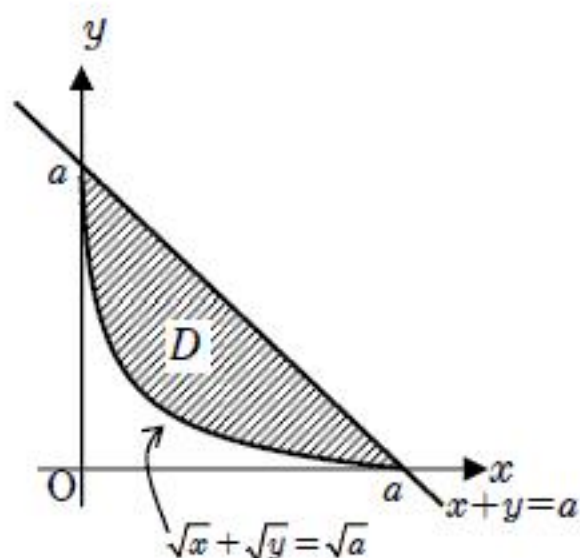
よって D の面積は、

$$\int_0^a \{(a-x) - (a - 2\sqrt{a}\sqrt{x} + x)\} dx$$

$$= \int_0^a (2\sqrt{a}\sqrt{x} - 2x) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} - x^2 \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{3}a^2 \quad \cdots \text{答え}$$



(2) x の微小な増分 Δx に対する V の増分 ΔV は、円錐の側面積に厚み Δx をかけたもので近似でき、

$$\Delta V = \sqrt{2}\pi \cdot 2(\sqrt{a}\sqrt{x} - x)^2 \cdot \Delta x$$

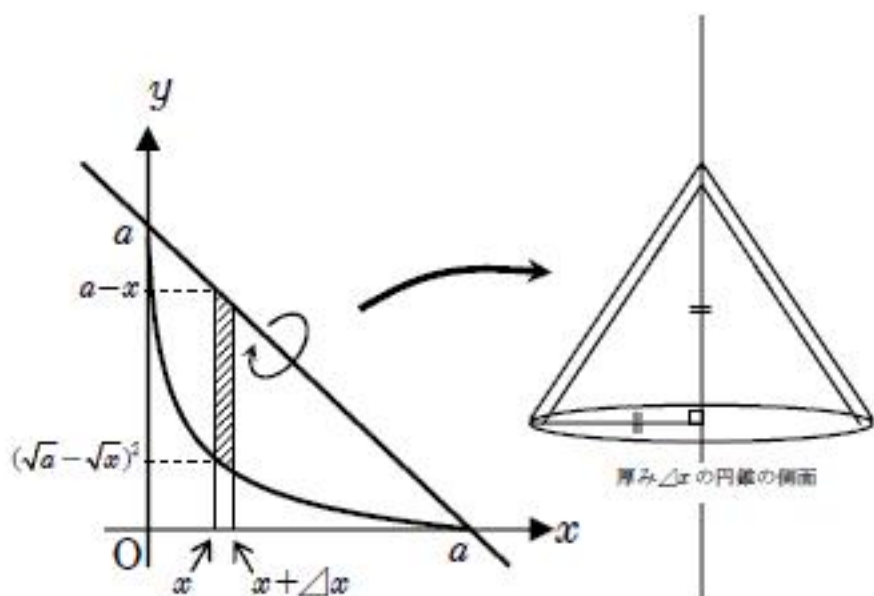
$$= 2\sqrt{2}\pi \left(x^2 + ax - 2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} \right) \Delta x$$

と書けるので、求める体積は、

$$V = 2\sqrt{2}\pi \int_0^a \left(x^2 + ax - 2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}} \right) dx$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{4}{5}\sqrt{a}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^a$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{15}\pi a^3 \quad \cdots \text{答え}$$



$$f(m,n)=\frac{1}{2}\left\{(m+n-1)^2+(m-n+1)\right\}$$

$$(1) \quad f(m,n)=100$$

$$\Leftrightarrow (m+n-1)^2+(m-n+1)=200 \quad \cdots \textcircled{1}$$

について、

$$m+n-1=t \quad (m\geq 1, n\geq 1 \text{より} t \text{は自然数})\cdots \textcircled{2}$$

とおくと①は

$$m-n+1=200-t^2 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。②, ③から

$$2m=200-t^2+t$$

$$2n-2=t^2+t-200$$

となり、 $m\geq 1, n\geq 1$ なので

$$200-t^2+t\geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad t(t-1)\leq 198$$

$$t^2+t-200\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(t+1)\geq 200$$

あとは $13\cdot 14=182, 14\cdot 15=210$ から2つの不等式を同時に満たす t は

$$t=14$$

のみとなる。よって、

$$\begin{cases} m+n-1=14 \\ m-n+1=4 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} m=9 \\ n=6 \end{cases} \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \quad a^2+b=c^2+d \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$-a< b\leq a \quad \cdots \textcircled{2} \qquad -c< d\leq c \quad \cdots \textcircled{3}$$

のとき、①から

$$a^2-c^2=d-b$$

$$\Leftrightarrow (a+c)(a-c)=d-b$$

$a\neq c$ とすると、

$$a+c=\frac{d-b}{a-c} \quad \cdots \textcircled{4}$$

が成立。また②, ③から

$$-(a+c)< d-b< a+c \quad \cdots \textcircled{5}$$

が成立。

(i) $a>c$ のとき、④, ⑤から

$$a+c=\frac{d-b}{a-c}<\frac{a+c}{a-c} \quad \Leftrightarrow \quad a-c<1 \quad \Leftrightarrow \quad a<c+1$$

となるので、

$$c<a<c+1$$

が成立するが a, c は共に整数なのでこれを満たす a, c は存在しない。

(ii) $a<c$ のとき、④, ⑤から

$$a+c=\frac{d-b}{a-c}<\frac{-(a+c)}{a-c} \quad \Leftrightarrow \quad a-c>-1 \quad \Leftrightarrow \quad c-1<a$$

となるので、

$$a<c<a+1$$

が成立するが a, c は共に整数なのでこれを満たす a, c は存在しない。

以上から $a=c$ となるので①より $b=d$ となる。 $\cdots$ 証明終り

(3) $f(m,n)=k$ を満たす自然数 m, n が存在

$$\Leftrightarrow (m+n-1)^2+(m-n+1)=2k \text{を満たす自然数} m, n \text{が存在}$$

について、 t を1以上の自然数として、

$$m+n-1=t, \quad t^2+(m-n+1)=2k \text{を満たす自然数} m, n \text{が存在}$$

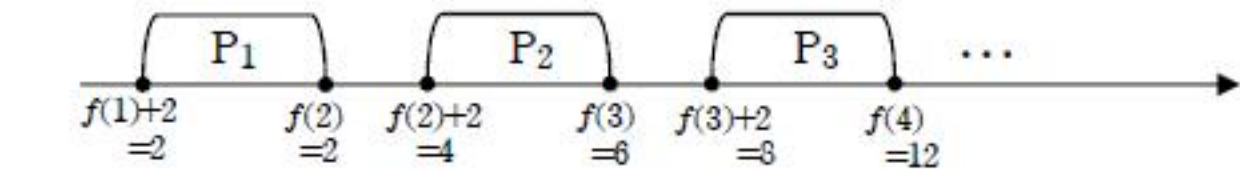
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m=2k-t^2+t \\ 2n-2=t^2+t-2k \end{cases} \text{を満たす自然数} m, n \text{が存在}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2k-t^2+t\geq 2 \\ 2t^2+t-2k\geq 0 \end{cases} \text{を満たす自然数} t \text{が存在}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t(t-1)+2\leq 2k \\ t(t+1)\geq 2k \end{cases} \cdots \textcircled{1} \text{を満たす自然数} t \text{が存在}$$

よって、①が任意の自然数 k に対し、ただ1つの自然数解 t を持つことを示せばよい。

そこで $f(t)=t(t-1)$ とおき、区間 $P_t=[f(t)+2, f(t+1)]$ を考える。 $f(t)$ は常に偶数であり、①の形から、任意の偶数 $2k(k\geq 1)$ に対してそれを含む区間 P_t がただ1つ存在すればよい。そこで集合 $Q=P_1\cup P_2\cup P_3\cup\cdots$ を考えると、この集合 Q は2以上の全ての偶数を含むので、任意の偶数 $2k(k\geq 1)$ はこの集合に属す。また任意の自然数 $a, b(a\neq b)$ に対して $P_a\cap P_b=\phi$ なので、 $2k$ はいずれかの区間 P_t のみに含まれる。



よって①を満たす自然数 t はただ1つ存在することが言えるので、 $f(m,n)=k$ を満たす自然数の組 m, n はただ1組だけ存在する。

$\cdots$ 証明終り

※(2)の結果を利用する場合は、『解の存在』と『解の一意性』を示せばよい。

解の一意性に関しては次のように(2)が適用できる。 $f(m,n)=k$ が異なる解の組

$(m_1, n_1), (m_2, n_2)$ をもつと仮定すると

$$(m_1+n_1-1)^2+(m_1-n_1+1)=2k \text{について、}$$

$$m_1+n_1-1=a, \quad m_1-n_1+1=b \text{とすると} -a< b\leq a \text{が成立。}$$

$$\text{同様に} (m_2+n_2-1)^2+(m_2-n_2+1)=2k \text{について、}$$

$$m_2+n_2-1=c, \quad m_2-n_2+1=d \text{とすると} -c< d\leq c \text{が成立。よって(2)の結果から}$$

$$a=c, \quad b=d \text{となるので} m_1=m_2, \quad n_1=n_2 \text{となり矛盾。}$$

よって解が存在するとしてもただ1つであることが言える。解の存在は(3)の解法のように示せる。

(3)別解

$$f(m,n)=\frac{1}{2}\left\{(m+n-1)^2+(m-n+1)\right\} \text{について}$$

$$m+n-1=a, \quad m-n+1=b \text{とおくと} a\geq 1 \text{であり、}$$

$$2m=a+b, \quad a-b=2(n-1)\geq 0 \text{であり、}$$

$$2m=a+b\leq 2a \text{から} m\leq a \text{を満たす。このとき、}$$

$$\begin{aligned} f(m,n) &= \frac{1}{2}(a^2+b) \\ &= \frac{1}{2}(a^2-a+2m) \\ &= \frac{1}{2}a(a-1)+m \\ &= \left(\sum_{l=0}^{a-1} l\right)+m \end{aligned}$$

となる。以下、任意の自然数 k に対して

$$\left(\sum_{l=0}^{a-1} l\right)+m=k \quad \cdots \text{※}$$

を満たす自然数 a, m の組がただ1つだけ存在することを示す。

(自然数 a, m の組が決定できれば $n=a+1-m$ により n も決定できる。ただし $n\geq 1$ を満たすことが必要。)

任意の自然数 k に対して

$$\sum_{l=0}^{p-1} l < k$$

を満たす最大の自然数 p がただ1つ存在するのでそれを a とすると、 $a\geq 1$ であり、

$$\sum_{l=0}^{a-1} l < k \leq \sum_{l=0}^a l$$

が成立する。また、

$$0 < k - \left(\sum_{l=0}^{a-1} l\right) \leq a$$

$$\text{を満たすので} k - \left(\sum_{l=0}^{a-1} l\right) = m \text{とおくと} 1 \leq m \leq a \text{を満たし、}$$

さらに $a-m+1=n$ とおくと $n\geq 1$ である。このときの m, n を使うことで、

$$k = \left(\sum_{l=0}^{a-1} l\right) + m$$

と書け、ひいては※を満たす自然数 a, m の組は1組だけ存在することになる。

この方法により、任意の k から※の形が得られるので、

$f(m,n)=k$ を満たす自然数 m, n の組は1組だけ存在する。 $\cdots$ 証明終り

[Ⅲ]

$$f(2x) = (e^x + 1)f(x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) ①で $x=0$ とすることで、

$$f(0) = (e^0 + 1)f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 2f(0)$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 0 \quad \cdots \text{証明終り}$$

(2) $x \neq 0$ のとき、 $e^x \neq 1$ である。よって、①を利用して、

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{e^x - 1} &= \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + 1 \right) f\left(\frac{x}{2} \right)}{e^x - 1} \\ &= \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} + 1 \right) f\left(\frac{x}{2} \right)}{\left(e^{\frac{x}{2}} + 1 \right) \left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)} \\ &= \frac{f\left(\frac{x}{2} \right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1} \quad \text{が成立する。} \quad \cdots \text{証明終り} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{h - 0}{e^h - 1} \cdot \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \right\} \\ &= \frac{1}{e^0} \cdot f'(0) \\ &= f'(0) \quad \text{となる。} \quad \cdots \text{証明終り} \end{aligned}$$

(4) (2)の結果から

$$\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2} \right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1} = \cdots = \frac{f\left(\frac{x}{2^n} \right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1}$$

が成立する。よって(3)の結果とで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{e^x - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{x}{2^n} \right)}{e^{\frac{x}{2^n}} - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1} = f'(0)$$

より $\frac{f(x)}{e^x - 1} = f'(0)$ が成立し、

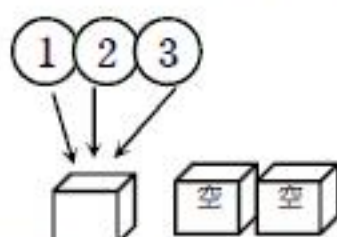
$$f(x) = (e^x - 1)f'(0) \quad \text{となる。} \quad \cdots \text{証明終り}$$

[IV]

(1) p_3 : 3 個の球を 3 個の箱に入れるとき、2 箱だけ空となる確率

3 つの球が 1 箱に集中する場合なので、

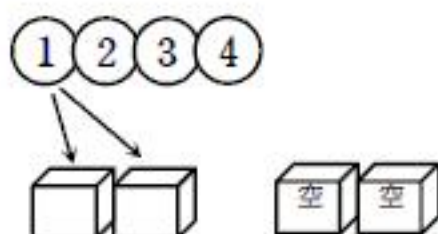
$$p_3 = \frac{{}_3C_1}{3^3} = \frac{1}{9} \quad \dots \text{答え}$$



p_4 : 4 個の球を 4 個の箱に入れるとき、2 箱だけ空となる確率

4 つの球が 2 箱に集中し、2 箱は空の場合なので、1 つの箱に集中してしまう場合を考慮して、

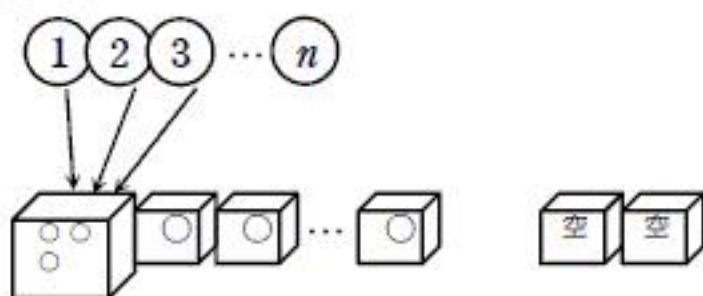
$$p_4 = \frac{{}_4C_2 \cdot (2^4 - 2)}{4^4} = \frac{21}{64} \quad \dots \text{答え}$$



(2) q_n : n 個の球を n 箱に入れるとき、2 箱だけ空、1 箱だけ 3 個、他の $n-3$ 箱は 1 つだけ球が入る確率

まずは空の箱を 2 つ選ぶ。そして球が 3 つ入る箱を $n-2$ 箱から 1 つ選び、3 つの球を入れる。残り $n-3$ 球を $n-3$ 箱に振り分けることで、

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{{}_n C_2 \cdot {}_{n-2} C_1 \cdot {}_3 C_3 \cdot (n-3)!}{n^n} \\ &= \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)!}{12n^n} \quad \dots \text{答え} \end{aligned}$$



(3) p_n : n 個の球を n 個の箱に入れるとき、2 箱だけ空となる確率

分け方は次の 2 通りのみ考えられる。箱の中に入る球の個数について、

(0, 0, 3, 1, 1, 1, 1, ..., 1) ((2)の分け方)

(0, 0, 2, 2, 1, 1, 1, ..., 1)

下のような分け方の確率を求めると、(2)と同様に計算して

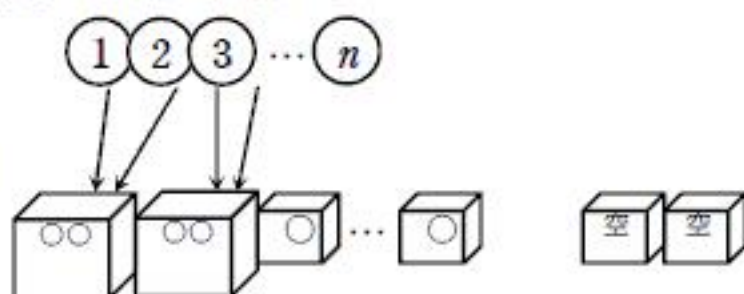
$$\begin{aligned} &\frac{{}_n C_2 \cdot {}_{n-2} C_2 \cdot {}_2 C_2 \cdot {}_{n-2} C_2 \cdot (n-4)!}{n^n} \\ &= \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)!}{16n^n} \end{aligned}$$

となるのでこれと q_n をあわせて、

$$p_n = \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)!}{12n^n}$$

$$+ \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2 (n-4)!}{16n^n}$$

$$= \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)! (3n-5)}{48n^n} \quad \dots \text{答え} \quad (\ast \text{これは } n \geq 3 \text{ でも成立する})$$



(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)!}{12n^n} \cdot \frac{48n^n}{n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)! (3n-5)} \right\}$$

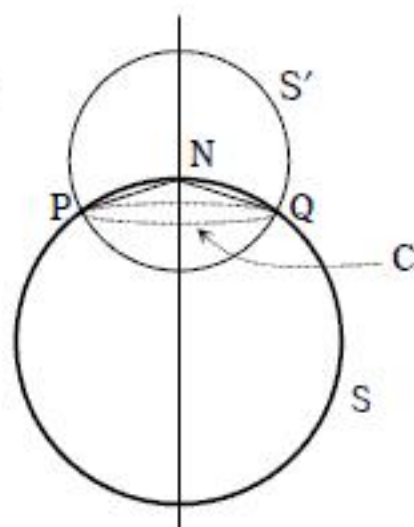
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3n-5}$$

$$= 0 \quad \dots \text{答え}$$

[V]

(1) 条件(a)より2点P, Qは点Nより等距離にある。よってNを中心とし半径NPである球面S'が存在し、その球と球面Sは共通部分を持ち、それは円周Cである。SとS'の中心が共にz軸上にあることからその円周Cはxy平面に平行な平面上にある。円周C上にP, Qが存在するので2点P, Qのz座標は等しい。

…証明終り



(2) 点Pが平面 $z=h$ ($-1 < h < 1$)上にあるとき、点Qも平面 $z=h$ 上にあり、ともに円周C上にある。その円周Cの中心をRとするとRはz軸上にあり、

$$NR = 1 - h$$

$$RP = RQ = \sqrt{1 - h^2}$$

となるから、

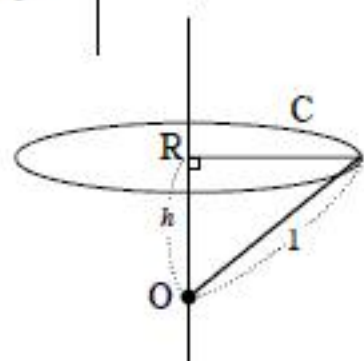
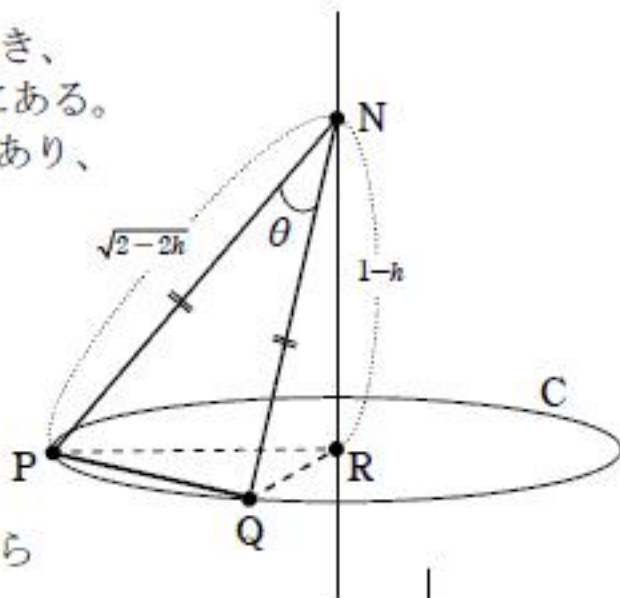
$$NP = NQ = \sqrt{(1 - h)^2 + (\sqrt{1 - h^2})^2} = \sqrt{2 - 2h}$$

よって二等辺三角形NPQについて余弦定理から

$$PQ^2 = (\sqrt{2 - 2h})^2 + (\sqrt{2 - 2h})^2 - 2\sqrt{2 - 2h}\sqrt{2 - 2h}\cos\theta = 4(1 - h)(1 - \cos\theta)$$

従って、

$$PQ = 2\sqrt{(1 - h)(1 - \cos\theta)} \quad \text{…答え}$$



(3) 切り口は右図。MはPQの中点。その切り口の面積 $S(h)$ は、

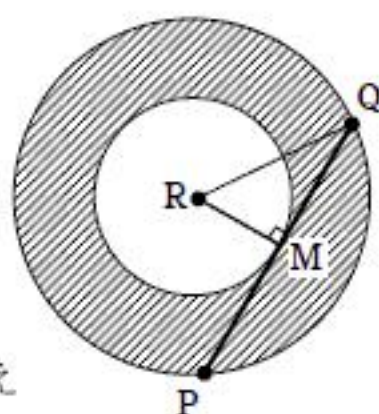
$$S(h) = \pi(RQ^2 - RM^2)$$

$$= \pi QM^2$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}PQ \right)^2$$

$$= \frac{\pi}{4}PQ^2$$

$$= \pi(1 - h)(1 - \cos\theta) \quad \text{…答え}$$



(4) 線分PQが円Cの直径以下のとき、

$$2\sqrt{(1 - h)(1 - \cos\theta)} \leq 2\sqrt{1 - h^2} \quad \text{より} \quad -\cos\theta \leq h$$

これと $-1 \leq h \leq 1$ ($h = \pm 1$ のときは $S(h) = 0$)とで

$$-\cos\theta \leq h \leq 1$$

で考えると、Tの体積Vは、

$$V = \int_{-\cos\theta}^1 S(h)dh$$

$$= \int_{-\cos\theta}^1 \pi(1 - h)(1 - \cos\theta)dh$$

$$= \pi(1 - \cos\theta) \left[h - \frac{1}{2}h^2 \right]_{-\cos\theta}^1$$

$$= \pi(1 - \cos\theta) \left(\frac{1}{2} + \cos\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta \right)$$

ここで $\cos\theta = u$ とおくと、 $-1 < u < 1$ であり、

$$V = \frac{1}{2}\pi(1 - u)(1 + u)^2 \quad \frac{dV}{du} = \frac{1}{2}\pi\{-(3u - 1)(u + 1)\}$$

から下のような増減となるのでVは $u = \frac{1}{3}$ で極大かつ最大

u	(-1)	…	$\frac{1}{3}$	…	(1)
V'		+	0	-	
V					

$$\left(V' = \frac{dV}{du} \right)$$

よって求めるVの最大値は、

$$\frac{1}{2}\pi \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{16}{27}\pi \quad \text{…答え}$$