

1

(1)

与式より $(x-1)(x-t) > 0$

$$\therefore \text{求める解は、} \begin{cases} t < 1 \text{ のとき} & x < t, 1 < x \\ t = 1 \text{ のとき} & x \neq 1 \text{ の全ての实数} \\ t > 1 \text{ のとき} & x < 1, t < x \end{cases} \quad \cdots \text{答え}$$

(2)

 $0 \leq t \leq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^1 |x^2 - (1+t)x + t| dt \\ &= \int_0^t \{x^2 - (1+t)x + t\} dt + \int_t^1 \{-x^2 + (1+t)x - t\} dt \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1+t}{2}x^2 + tx \right]_0^t + \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1+t}{2}x^2 - tx \right]_t^1 \\ &= -\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + t^2 - \frac{1}{3} + \frac{1+t}{2} - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t^3 + t^2 \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{6} \quad \cdots \text{答え} \\ &= -\frac{1}{6}(2t^3 - 6t^2 + 3t - 1) \end{aligned}$$

(3)

(2) より、

$$f'(t) = -t^2 + 2t - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(2t^2 - 4t + 1)$$

よって、 $f'(t) = 0$ のとき $t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ $\therefore 0 \leq t \leq 1$ での増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{1}{6}$				$\frac{1}{3}$

$$t = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ のとき、} f(t) = -\frac{1}{3}\{f'(t)(t-1) - t\} = \frac{1}{3}t$$

$$\text{よって、} f\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{6}$$

増減表より、 $f(t)$ の最大値、最小値は

$$t = 1 \text{ のとき} \quad \text{最大値} \quad \frac{1}{3}$$

$$t = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ のとき} \quad \text{最小値} \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{6} \quad \cdots \text{答え}$$

(1)

$$\angle BOA = \theta \text{ とおくと、 } \tan \theta = \frac{2a}{2} = a, \quad \tan 2\theta = \frac{b}{2}$$

$$\text{よって、 } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2a}{1 - a^2} = \frac{b}{2}$$

$$\therefore b = \frac{4a}{1 - a^2} \quad \cdots \text{答え}$$

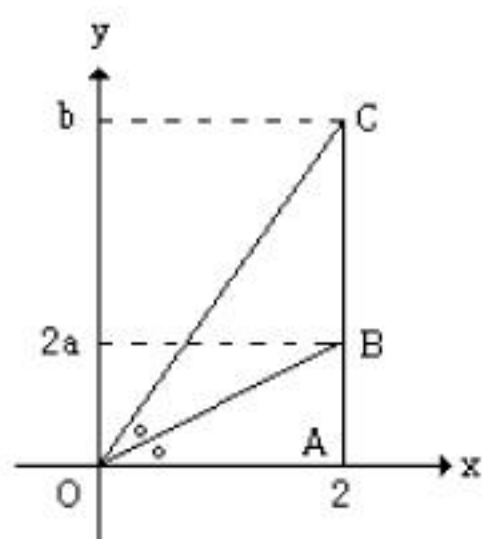
[別解]

$$(b - 2a) : 2a = \sqrt{b^2 + 4} : 2 \quad \text{より、} \quad b - 2a = a\sqrt{b^2 + 4}$$

$$\text{両辺 2 乗して、} \quad b^2 - 4ab + 4a^2 = a^2 b^2 + 4a^2$$

$$\text{よって、} \quad b - 4a = a^2 b$$

$$\therefore b = \frac{4a}{1 - a^2} \quad \cdots \text{答え}$$



(2)

$$\angle OAB = 90^\circ \text{ より、求める円は中心 } (1, a)、\text{半径 } \frac{\sqrt{2^2 + (2a)^2}}{2} = \sqrt{1 + a^2} \text{ の円である。}$$

よって、求める円の方程式は、

$$(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 1 + a^2 \quad \cdots \text{答え}$$

(3)

求める円の中心は、直線 OB 上にある。

円の中心 Q の座標は (p, ap) であり、半径は ap となるので、求める円の方程式は、

$$(x - p)^2 + (y - ap)^2 = a^2 p^2 \quad \cdots \text{答え}$$

(4)

$$a = \frac{1}{2}, p = 4 \text{ のとき、}$$

$$(3) \text{ で求めた円は、} (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20 \text{ となる。}$$

接点の x 座標を t とおくと、y 座標は $\frac{b}{2}t$ となるので、

$$(1) \text{ と条件より接点の座標は } (t, \frac{4}{3}t) \text{ と表される。}$$

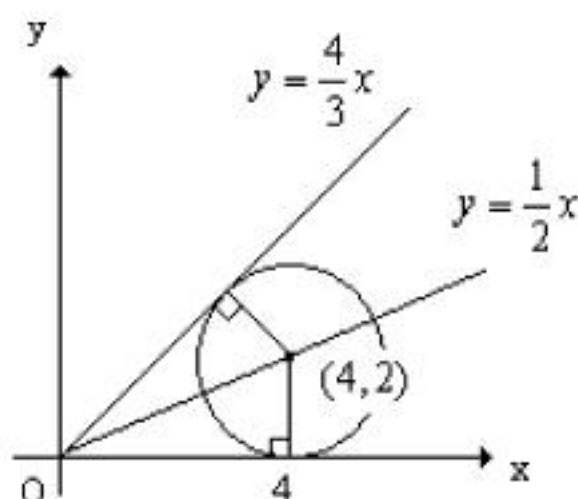
 $y = \frac{1}{2}x$ と円の 2 つの接点を結ぶ直線は直交するので、

$$\frac{0 - \frac{4}{3}t}{4 - t} = -2 \quad \text{よって、} \quad \frac{10}{3}t = 8 \quad \therefore t = \frac{12}{5}$$

$$\text{よって、求める接点の座標は } \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5} \right) \quad \cdots \text{答え}$$

[別解]

$$(t, \frac{4}{3}t) \text{ を } (x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 20 \text{ に代入し 2 次方程式を解くと、} t = \frac{12}{5} \text{ が求まる。}$$



3

(1)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c}
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\
 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1
 \end{array}$$

上の表より、 $a_7 = 0, a_8 = 1$ …答え

(2)

(i)

$$\begin{aligned}
 a_{2^k-1} &= a_{(2^k-2)+1} \\
 &= a_{2(2^{k-1}-1)+1} \\
 &= 2a_{2^{k-1}-1} \\
 &= \dots \\
 &= 2^{k-1}a_{2^1-1} \\
 &= 0 \quad \dots \text{答え}
 \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
 a_{2^k} &= a_{(2^k-2)+2} \\
 &= a_{2(2^{k-1}-1)+2} \\
 &= a_{2^{k-1}-1} + a_{2^{k-1}} \\
 &= a_{2^{k-1}} \\
 &= \dots \\
 &= a_{2^1} \\
 &= 1 \quad \dots \text{答え}
 \end{aligned}$$

(3)

(i)

$$a_{b_{k+1}} = a_{2b_k+1} = \boxed{2a_{b_k}} \quad \dots \text{答え}$$

(ii)

$$a_{b_k} = 2a_{b_{k-1}} = \dots = 2^{k-1}a_{b_1} = 2^{k-1}a_2 = \boxed{2^{k-1}} \quad \dots \text{答え}$$

(iii) 与式より、 $b_{k+1}+1=2(b_k+1)$

$$\text{よって、} \quad b_k+1=2^{k-1}(b_1+1)=3 \cdot 2^{k-1}$$

$$\therefore \quad b_k=3 \cdot 2^{k-1}-1 \quad \dots \text{答え}$$

(4)

$$(3) \text{ より、} \quad a_{3 \cdot 2^{k-1}} = a_{b_k+1}$$

$$\text{また、} \quad a_{3 \cdot 2^{k-1}} = a_{2 \cdot 3 \cdot 2^{k-2}} = a_{2(b_{k-1}+1)} = a_{b_{k-1}} + a_{b_{k-1}+1} = 2^{k-2} + a_{b_{k-1}+1}$$

よって、 $k \geq 2$ のとき

$$a_{b_k+1} = a_{b_1+1} + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{j-2} = a_3 + \frac{1 \cdot (2^{k-1}-1)}{2-1}$$

$$= 2^{k-1}-1 \quad (\text{これは } k=1 \text{ のときも成り立つ}) \quad \dots \text{答え}$$