

問 1

- (1) ア 8 イ 2 ウ 7
(2) エ 7 オ 2 カ 7
(3) キ 7 ク 6 ケ 2 コ 7

〔解説〕

カードの取り出し方の全事象は $3^4 = 81$ 通りである。

(1)

1人だけ退出するのは3人が同じアルファベットで、1人が違うアルファベットのときである。退出する人の選び方が ${}_4C_1 = 4$ 通り、アルファベットの選び方が ${}_3P_1 = 6$ 通りである。したがって1人だけ退出する確率は

$$\frac{4 \cdot 6}{81} = \frac{8}{27}$$

となる。

(2)

誰も退出しないのは全員が同じアルファベットであるか、2人が同じアルファベットでありかつ残りの2人も同じアルファベットのときである。全員が同じアルファベットである場合の数はアルファベットの選び方を考えると3通りである。2人が同じアルファベットでありかつ残りの2人も同じアルファベットのときの場合の数は、アルファベットの選び方が ${}_3C_2 = 3$ 通りでありそのそれぞれに対して人の選び方が ${}_4C_2 = 6$ 通りあるので $3 \cdot 6 = 18$ 通りある。したがって求める確率は

$$\frac{3+18}{81} = \frac{7}{27}$$

となる。

(3)

2人退出するのは、2人が同じアルファベットで、残りの2人が異なるアルファベットのときである。退出しない2人の選び方が ${}_4C_2 = 6$ 通りであり、そのそれぞれに対してアルファベットの選び方が $3! = 6$ 通りあるので、2人退出する確率は

$$\frac{6^2}{81} = \frac{4}{9}$$

となる。3人あるいは4人が退出するということはない。したがって部屋に残る人数と、その実現確率の関係は以下の表のようになる。

残りの人数	0	1	2	3	4
確率	0	0	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{7}{27}$

したがって、求める期待値を E とすると

$$\begin{aligned} E &= \frac{12}{27} \cdot 2 + \frac{8}{27} \cdot 3 + \frac{7}{27} \cdot 4 \\ &= \frac{76}{27} \end{aligned}$$

となる。

問 2

(1)

原点が地点 A、 y 軸正の向きが北、 x 軸正の向きが東となるように xy 座標軸をとる。このとき $B(-a, 0)$, $C(0, -b)$ である。また線分 BA、CA 上を動く 2 人の、出発してから t 時間後の位置をそれぞれ P, Q とすると $P(3t-a, 0)$, $Q(0, 7t-b)$ となる。また出発してから t 時間後の 2 人の距離を $d(t)$ とすると

$$\begin{aligned} d(t)^2 &= (3t-a)^2 + (7t-b)^2 \\ &= 58t^2 - 2(3a+7b)t + a^2 + b^2 \\ &= 58\left(t - \frac{3a+7b}{58}\right)^2 - \frac{(3a+7b)^2}{58} + a^2 + b^2 \\ &= 58\left(t - \frac{3a+7b}{58}\right)^2 + \frac{(7a-3b)^2}{58} \end{aligned}$$

となる。したがって $d(t)^2$ は $t = \frac{3a+7b}{58}$ において最小値 $\frac{(7a-3b)^2}{58}$ をとる。 $d(t) > 0$ なので

$d(t)^2$ が最小となるとき、 $d(t)$ も最小となる。したがって求める最小値は

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{\frac{(7a-3b)^2}{58}} \\ &= \frac{|7a-3b|}{\sqrt{58}} \end{aligned}$$

となる。

(2)

$x^2 - x = x(x-1)$ は、 $0 \leq x < 1$ においては $x(x-1) \leq 0$ なので、 $|x^2 - x| = -x^2 + x$ である。

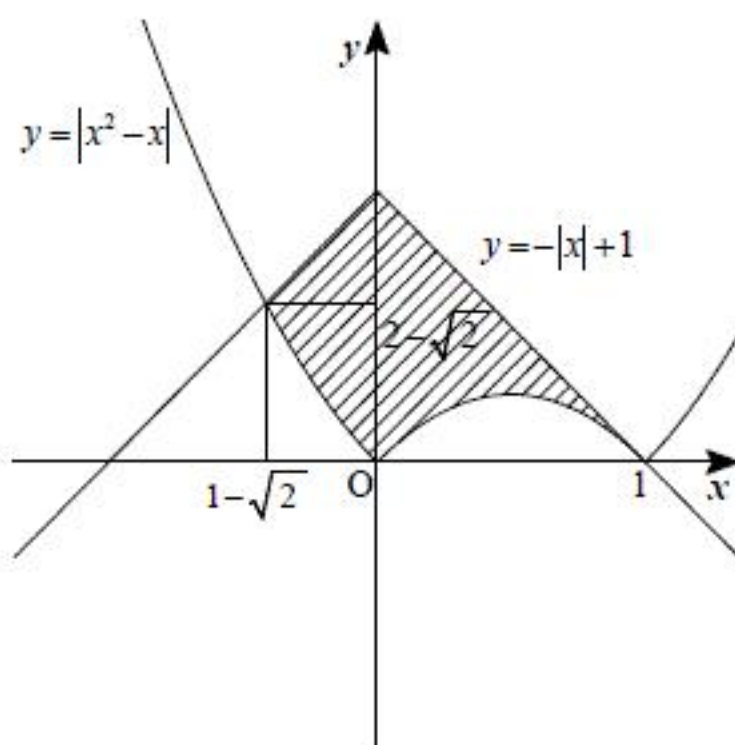
また $x < 0$ 、 $x \geq 1$ においては $x(x-1) \geq 0$ なので、 $|x^2 - x| = x^2 - x$ である。したがって

$$y \geq |x^2 - x| \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x^2 + x & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ y \geq x^2 - x & (x < 0, x \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。同様にして

$$y \leq -|x| + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -x + 1 & (0 \leq x \text{ のとき}) \\ y \leq x + 1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって、求める面積は下図斜線部となる。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-\sqrt{2}}^0 \{(x+1) - (x^2 - x)\} dx + \int_0^1 \{(-x+1) - (-x^2 + x)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{1-\sqrt{2}}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{(1-\sqrt{2})^3}{3} - (1-\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2}) + \frac{1}{3} \\ &= \frac{-4+4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

問 3

- (1) ツ 5 テ 3 ト 1 ナ 4
 (2) ニ 1 ヌ 0 ネ 3
 (3) ノ 3
 (4) ハ 7 ヒ 3 フ 3
 (5) ヘ 2 ホ 7

【解説】

(1)

余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle ABC &= \frac{49+64-25}{2 \cdot 7 \cdot 8} \\ &= \frac{11}{14}\end{aligned}$$

となる。したがって $0 < \angle ABC < 180^\circ$ であることより

$$\begin{aligned}\sin \angle ABC &= \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{14}\end{aligned}$$

となる。

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{14} \\ &= 10\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$\triangle ABC$ の面積について

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}r(7+8+5) &= 10\sqrt{3} \\ \therefore r &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。

(4)

$\triangle ABC$ において正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{5}{\sin \angle ABC} &= 2R \\ \therefore R &= \frac{7\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(5)

$\triangle ABC$ の内接円が、線分 AB, BC, CA に接する点をそれぞれ P, Q, R とする。

$$AP = u, BQ = s, CR = t$$

と置く。一般に円の外部の点 W から円に接線を引き、その接点を X, Y とするとき $WX = XY$ である。このことを用いると

$$AR = u, PB = s, CQ = t$$

となる。したがって $\triangle ABC$ の各辺の長さについて

$$\begin{cases} s+u=7 \\ u+t=5 \\ s+t=8 \end{cases}$$

となる。これを解くと

$$s=5, t=3, u=2$$

となる。したがって $BQ=5$ である。よって直角 3 角形 BIQ において

$$\begin{aligned}BI &= \sqrt{5^2+3} \\ &= 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

となる。