

数 学

(問 題)

2008年度

〈2008 H20020015 (数学)〉

注 意 事 項

1. 問題冊子および記述解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～6ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷の乱れ、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。欄外の余白には何も記入しないこと。
4. 試験が開始されたらただちに、解答用紙の所定欄（2か所）に、受験番号および氏名を正確に丁寧に記入すること。
5. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
6. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の にあてはまる数または数の組を解答用紙の所定欄に記入せよ.

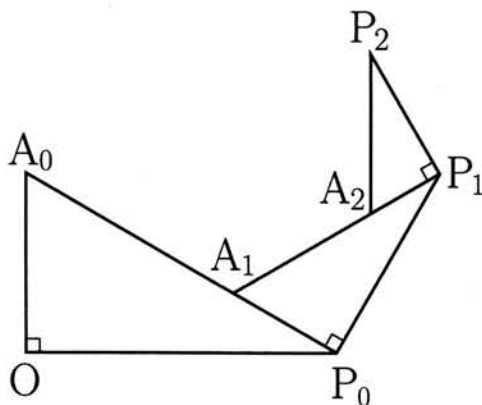
- (1) n を自然数とする. $219!$ は 2^n で割り切れるが, 2^{n+1} では割り切れないとすると, $n =$ $\mathcal{A}$ である.

- (2) 媒介変数 θ を用いて

$$x = \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} + \sin \theta - 1 \quad \left(\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

によって表される曲線と, x 軸, y 軸で囲まれる図形の面積は $\mathcal{I}$ である.

- (3) 座標平面上で $A_0(0, 1)$, $O(0, 0)$, $P_0(\sqrt{3}, 0)$ として三角形 A_0OP_0 を考える. これに, $\triangle A_0OP_0$ の各辺の長さを $\frac{2}{3}$ 倍した $\triangle A_1P_0P_1$ を下の図のようにおく. 同様に $n \geq 1$ についても, $\triangle A_nP_{n-1}P_n$ の各辺の長さを $\frac{2}{3}$ 倍して, 直角を P_n に合わせて $\triangle A_{n+1}P_nP_{n+1}$ をおいていく. $P_n(x_n, y_n)$ として, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ とすると, $(a, b) =$ $\mathcal{U}$ である.



- (4) 座標平面上の 6 個の点 $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$ を 2 つずつ 3 つの組に分けて, それぞれの組における 2 点の距離の和を考える. このような和の最大値は $\mathcal{E}$ である.

2 次の問いに答えよ.

- (1) 任意の実数 x に対して, 不等式

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$$

が成り立つことを示せ.

- (2) n を自然数とする. 任意の実数 x に対して, 不等式

$$(-1)^{n+1} \left(\cos x - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \right) \geq 0$$

が成り立つことを示せ. ただし, $0! = 0^0 = 1$ とする.

3 a を正の実数とする. 座標平面において, 点 $P(a, a^2)$ を通り, 放物線 $y = x^2$ 上のある点における法線となるような直線の本数を n と表す.

- (1) 本数 n を求めよ.

- (2) $n = 2$ となるように a を定め, 点 P を通る 2 本の法線のうち, 傾きが大きい直線を l と表す. 直線 l と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

4 座標平面上で次のような変換 f を考える.

f : 原点を中心として正の向きに角 θ だけ回転し, y 軸について
対称移動をし, y 軸の正方向に 1 だけ平行移動する.

点 $P_0(x_0, y_0)$ に変換 f を n 回くり返し行って得られる点を $P_n(x_n, y_n)$ と表す. 次の問いに答えよ.

- (1) x_n, y_n を x_0, y_0 を用いて表せ.
- (2) $P_0 \neq P_2$ ならば, 点の列 $P_0, P_2, P_4, \dots, P_{2n}, \dots$ はある直線上に等しい間隔で並ぶことを示せ.
- (3) $P_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ とする. すべての点 $P_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ が 1 つの直線上に並ぶような θ の値を求めよ. ただし, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする.

[以 下 余 白]