

# 数学 (A方式)

## (問題)

2008年度

〈2008 H20021119〉

### 注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、マーク解答用紙を配布する。問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～12ページに記載されている。試験中に問題冊子の印字不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. マーク解答用紙については、受験番号を確認したうえ所定欄に氏名のみ記入すること。
5. 問1から問9までの「ア」, 「イ」, 「ウ」, …にはそれぞれ、 $-49$ ,  $-48$ ,  $\dots$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $0$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $\dots$ ,  $48$ ,  $49$ のいずれかが当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙のア、イ、ウ、…で示された欄にマークして答えること。

例. アに3, イに $-5$ , ウに30, エに $-24$ , オに0と答えたいとき。

|   | —                                | 十の位                   |                                  |                                  |                       | 一の位                              |                       |                       |                                  |                                  |                                  |                       |                       |                       |                       |
|---|----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
|   |                                  | 1                     | 2                                | 3                                | 4                     | 0                                | 1                     | 2                     | 3                                | 4                                | 5                                | 6                     | 7                     | 8                     | 9                     |
| ア | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| イ | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| ウ | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| エ | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |
| オ | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input checked="" type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/>            | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> | <input type="radio"/> |

6. マークははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようよく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

|         |                                     |                          |                          |
|---------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| マークする時  | <input checked="" type="radio"/> 良い | <input type="radio"/> 悪い | <input type="radio"/> 悪い |
| マークを消す時 | <input type="radio"/> 良い            | <input type="radio"/> 悪い | <input type="radio"/> 悪い |

7. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答を止め、筆記具をおくこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

【問 1】  $\left(\frac{1}{125}\right)^{20}$  を小数で表したとき、小数第 ア 位に初めて 0 でない数字が現れ、その値は イ である。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする。

【問2】図1のように一辺の長さが1の正六角形ABCDEFにおいて対角線の交点をOとする。ここで、Oを出発点として次のように平面を移動する点Pを考える。

- さいころを1回投げて1の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OA}$ の方向へ1進む。
- さいころを1回投げて2の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OB}$ の方向へ1進む。
- さいころを1回投げて3の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OC}$ の方向へ1進む。
- さいころを1回投げて4の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OD}$ の方向へ1進む。
- さいころを1回投げて5の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OE}$ の方向へ1進む。
- さいころを1回投げて6の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OF}$ の方向へ1進む。

点Oを出発点( $P_0$ とする)として、1回目の移動で点Pが進む位置を $P_1$ 、2回目の移動で進む位置を $P_2$ 、3回目の移動で進む位置を $P_3$ とする(例えば、さいころを3回投げて1回目に3、2回目に1、3回目に2が出た場合、点Pは図2のように移動する)。このとき、線分 $P_0P_1$ の長さの2乗の期待値は1、線分 $P_0P_2$ の長さの2乗の期待値は 、線分 $P_0P_3$ の長さの2乗の期待値は  である。

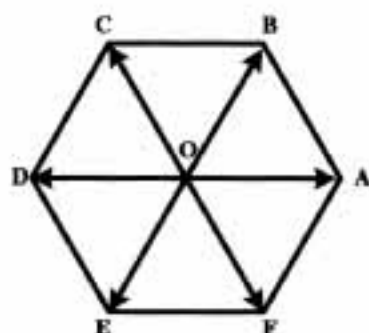


図1 正六角形ABCDEF

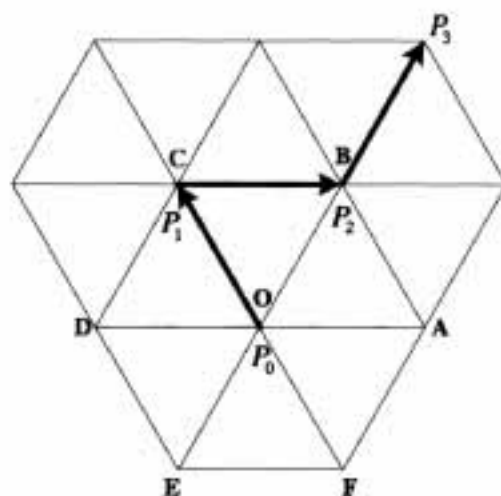


図2 点Pの移動の例

【問3】  $f(x) = x^2$  とする.  $0 < t < \frac{1}{2}$  を満たす  $t$  を用いて, 関数  $y = f(x)$  のグラフ上に4点  $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ,  $(-t, f(-t))$ ,  $(t, f(t))$ ,  $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$  をとり, それぞれ, 点A, B, C, Dとする. この4点を頂点とする四角形ABCDの面積が最大になるのは  $t = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$  のときで, そのときの面積は  $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$  である. ただし,  $\boxed{\text{カ}}$ ,  $\boxed{\text{ク}}$  はできる限り小さい自然数で答えること.

【問4】円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 2$ 、 $BC = 1$ 、 $CD = 3$  であり、 $\cos \angle BCD = -\frac{1}{6}$  とする。このとき、 $AD = \boxed{\text{ケ}}$  であり、四角形 ABCD の面積は  $\frac{3\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{4}$  である。

【問5】3次方程式  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  (ただし,  $a, b, c$  は実数の定数とする) は,  $a + b + c = -18$  を満たし,  $i - \frac{3}{i}$  ( $i$  は虚数単位) を解にもつ. このとき, 残りの2つの解は,  $x = \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}} i$  である.

【問6】正の整数  $a, b$  について次の条件を考える.

(条件1)  $a \geq 3$  かつ  $b \geq 8$

(条件2)  $a + b \geq 10$

(条件3)  $a + b \geq 11$

(条件4)  $ab \geq 24$

(条件5)  $a + b \geq 10$  かつ  $ab \geq 24$

(条件6)  $a + b \geq 11$  かつ  $ab \geq 24$

(条件1) ~ (条件6) のうちで条件 ス は他のすべての条件の十分条件であり, 条件 セ は他のすべての条件の必要条件である. また, 条件 ソ と条件 タ (条件 ソ と条件 タ の順序は問わない) は互いに同値である (以上については, 条件の番号のみをマークすること). さらに, (条件3) を満たして (条件4) を満たさない  $(a, b)$  の組は チ 個ある.

【問 7】 数列  $\{a_n\}$  について、初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が  $S_n = n(2n+1)$  となるときの、数列  $\{a_n\}$  の一般項は  $a_n = \boxed{\text{ツ}} n + \boxed{\text{テ}}$  である。次に、数列  $\{b_n\}$  について、 $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = 2b_n + 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) である。ここで、数列  $\{c_n\}$  を  $c_n = a_n(b_n + 1)$  とすると、数列  $\{c_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $T_n$  は、

$$T_n = \left( \boxed{\text{ト}} n + \boxed{\text{ナ}} \right) \boxed{\text{ニ}}^{n+1} + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。



【問 8】 四角形 OABC において、 $|\vec{OA}| = 4$ 、 $|\vec{OC}| = 3$  であり、 $\vec{OA}$  と  $\vec{OC}$  の内積は 3 である。さらに  $\vec{OB} = 2\vec{OA} + 3\vec{OC}$  を満たしている。点 O から対角線 AC に垂線 OP を引き、点 B から対角線 AC に垂線 BQ を引く。このとき、対角線 AC の長さは  $\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$  である。また、 $\vec{AP} = t\vec{AC}$  ( $t$  は定数) とおくと  $t = \frac{13}{19}$  であり、 $\vec{AQ} = s\vec{AC}$  ( $s$  は定数) とおくと  $s = \frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}}$  である。以上より、線分 PQ の長さは  $\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\sqrt{\boxed{\text{フ}}}}$  である。ただし、 $\boxed{\text{ハ}}$ 、 $\boxed{\text{フ}}$  はできる限り小さい自然数で答えること。

【問 9】  $x$  についての方程式  $|x^2 + ax + 2a| = a$  (ただし,  $a$  は正の実数とする) が, 異なる実数解をちょうど 2 個もつような  $a$  の値の範囲は  $\boxed{\text{ヘ}} < a < \boxed{\text{ホ}}$  である.

[以 下 余 白]