

数学 (B方式)

(問題)

2008年度

〈2008 H20021119〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、マーク解答用紙を配布する。問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～12ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. マーク解答用紙については、受験番号を確認したうえ所定欄に氏名のみ記入すること。
5. 問1から問9までの **ア** , **イ** , **ウ** , …にはそれぞれ、 $-49, -48, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 48, 49$ のいずれかが当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙の**ア** , **イ** , **ウ** , …で示された欄にマークして答えること。

例. **ア**に3, **イ**に-5, **ウ**に30, **エ**に-24, **オ**に0と答えたいとき。

	—	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. マークははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようよく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い

7. 試験終了の指示がでたら、すぐに解答を止め、筆記具をおくこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

【問 1】 $\left(\frac{1}{125}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第 ア 位に初めて 0 でない数字が現れ，その値は イ である．ただし， $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

【問2】図1のように一辺の長さが1の正六角形ABCDEFにおいて対角線の交点をOとする．ここで，Oを出発点として次のように平面を移動する点Pを考える．

- さいころを1回投げて1の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OA}$ の方向へ1進む．
- さいころを1回投げて2の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OB}$ の方向へ1進む．
- さいころを1回投げて3の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OC}$ の方向へ1進む．
- さいころを1回投げて4の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OD}$ の方向へ1進む．
- さいころを1回投げて5の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OE}$ の方向へ1進む．
- さいころを1回投げて6の目が出ると点Pは $\overrightarrow{OF}$ の方向へ1進む．

点Oを出発点（ P_0 とする）として，1回目の移動で点Pが進む位置を P_1 ，2回目の移動で進む位置を P_2 ，3回目の移動で進む位置を P_3 とする（例えば，さいころを3回投げて1回目に3，2回目に1，3回目に2が出た場合，点Pは図2のように移動する）．このとき，線分 P_0P_1 の長さの2乗の期待値は1，線分 P_0P_2 の長さの2乗の期待値は ，線分 P_0P_3 の長さの2乗の期待値は である．

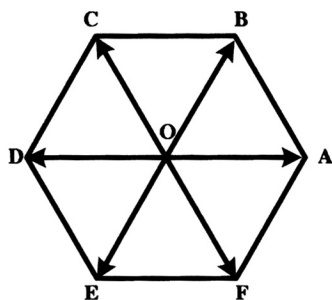


図1 正六角形ABCDEF

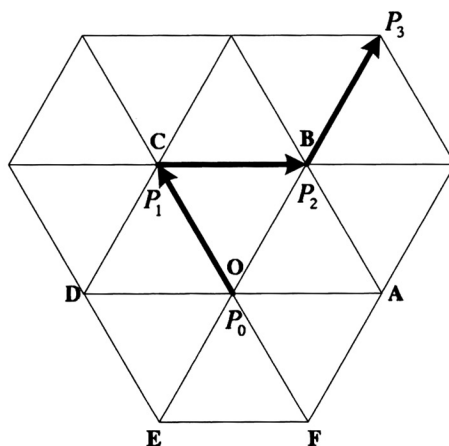


図2 点Pの移動の例

【問3】 $f(x) = x^2$ とする． $0 < t < \frac{1}{2}$ を満たす t を用いて，関数 $y = f(x)$ のグラフ上に4点 $\left(-\frac{1}{2}, f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ， $(-t, f(-t))$ ， $(t, f(t))$ ， $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ をとり，それぞれ，点A，B，C，Dとする．この4点を頂点とする四角形ABCDの面積が最大になるのは $t = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のときで，そのときの面積は $\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である．ただし， $\boxed{\text{カ}}$ ， $\boxed{\text{ク}}$ はできる限り小さい自然数で答えること．

【問4】円に内接する四角形 ABCD において、 $AB = 2$ 、 $BC = 1$ 、 $CD = 3$ であり、 $\cos \angle BCD = -\frac{1}{6}$ とする。このとき、 $AD = \boxed{\text{ケ}}$ であり、四角形 ABCD の面積は $\frac{3\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{4}$ である。

【問5】3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (ただし, a, b, c は実数の定数とする) は, $a + b + c = -18$ を満たし, $i - \frac{3}{i}$ (i は虚数単位) を解にもつ. このとき, 残りの2つの解は, $x = \boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}} i$ である.

【問6】正の整数 a, b について次の条件を考える.

- (条件1) $a \geq 3$ かつ $b \geq 8$
- (条件2) $a + b \geq 10$
- (条件3) $a + b \geq 11$
- (条件4) $ab \geq 24$
- (条件5) $a + b \geq 10$ かつ $ab \geq 24$
- (条件6) $a + b \geq 11$ かつ $ab \geq 24$

(条件1) ~ (条件6) のうちで条件 ス は他のすべての条件の十分条件であり, 条件 セ は他のすべての条件の必要条件である. また, 条件 ソ と条件 タ (条件 ソ と条件 タ の順序は問わない) は互いに同値である (以上については, 条件の番号のみをマークすること). さらに, (条件3) を満たして (条件4) を満たさない (a, b) の組は チ 個ある.

【問 7】 数列 $\{a_n\}$ について、初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n(2n+1)$ となるときの、数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{ツ}} n + \boxed{\text{テ}}$ である。次に、数列 $\{b_n\}$ について、 $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 2b_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である。ここで、数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_n(b_n + 1)$ とすると、数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n は、

$$T_n = \left(\boxed{\text{ト}} n + \boxed{\text{ナ}} \right) \boxed{\text{ニ}}^{n+1} + \boxed{\text{ヌ}}$$

である。

【問 8】 曲線 $y = 5 \log x$ 上に 2 点 P, Q をとり, それぞれの x 座標を p, q (ただし, $p < q$) とする. ここで, 2 点 P, Q における曲線の接線が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) とする

と, $\tan(\alpha - \beta)$ は p, q を用いて $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\boxed{\text{ネ}}(q - p)}{pq + \boxed{\text{ノ}}}$ と表わされる.

よって, 2 本の接線のなす角が $\frac{\pi}{4}$ となるような整数 p, q の組 (p, q) の中で最も大きい q の値は $\boxed{\text{ハ}}$ である.

【問 9】 $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする. $A = k \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ($k > 0$) が成り立つ

とき, k の値は $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{5}$ である. このとき, 点 $P(10, 0)$ をとり, 行列 A で表わされる座標平面上の点の移動によって, 点 P が移った点を点 Q とし, 同様に点 Q が移った点を点 R とする. このとき, 三角形 PQR の面積は $\boxed{\text{フ}}$ となる.

[以 下 余 白]