

数 学

問 題

2008年度

〈 H20020017 〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 試験終了の指示がでたら，すぐに解答を止め，筆記具を置いてください。終了の指示に従わず解答を続けた場合は，答案のすべてを無効とするので注意してください。
8. 問題冊子は持ち帰ってください。
9. 解答用紙は必ず提出してください。

[I] a を正の定数とする. xy -座標平面において, 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ と, 直線 $x + y = a$ とで囲まれた部分を D とおく. 以下の間に答えよ.

(1) D の概形を描き, その面積を求めよ.

(2) 直線 $x + y = a$ を軸として, D を 1 回転してできる図形の体積を求めよ.

[II] 自然数 m, n に対して $f(m, n)$ を

$$f(m, n) = \frac{1}{2} \{ (m + n - 1)^2 + (m - n + 1) \}$$

で定める. 以下の間に答えよ.

(1) $f(m, n) = 100$ をみたす m, n を 1 組求めよ.

(2) a, b, c, d は整数で, 等式 $a^2 + b = c^2 + d$ をみたすとする. 不等式 $-a < b \leq a, -c < d \leq c$ が成り立つならば, $a = c, b = d$ となることを示せ.

(3) 任意の自然数 k に対し, $f(m, n) = k$ をみたす m, n がただ 1 組だけ存在することを示せ.

[III] $f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数で, 関係式

$$f(2x) = (e^x + 1)f(x)$$

をみたしているとする. 以下の間に答えよ.

(1) $f(0) = 0$ を示せ.

(2) $x \neq 0$ に対して

$$\frac{f(x)}{e^x - 1} = \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{e^{\frac{x}{2}} - 1}$$

が成り立つことを示せ.

(3) 微分の定義を用いて $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{e^h - 1}$ を示せ.

(4) $f(x) = (e^x - 1)f'(0)$ が成り立つことを示せ.

[IV] n 個の球と n 個の箱がある. 各球を無作為にどれかの箱に入れる. すなわち各球を独立に確率 $\frac{1}{n}$ でどれか 1 つの箱に入れるものとする. $n \geq 3$ のとき 2 箱のみが空となる確率を p_n とする. 以下の問に答えよ.

- (1) p_3, p_4 を求めよ.
- (2) $n \geq 4$ とする. 2 箱のみが空で, 1 箱に 3 個の球が入り, その他の $(n-3)$ 箱のそれぞれに 1 個の球が入る確率 q_n を求めよ.
- (3) $n \geq 5$ に対し p_n を求めよ.
- (4) (2) で求めた q_n について, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{p_n}$ を求めよ.

[V] xyz -座標空間において, 原点を中心とする半径 1 の球面 S 上に点 $N(0, 0, 1)$ をとる. また $0 < \theta < \pi$ をみたす θ に対し, 次の 2 つの条件

- (a) $NP = NQ$
- (b) $\angle PNQ = \theta$

をみたす S 上の動点 P, Q について, 線分 PQ が通過してできる立体図形 T を考える. 以下の問に答えよ.

- (1) 点 P と点 Q の z 座標は等しいことを示せ.
- (2) 点 P が平面 $z = h$ 上にあるとき, 線分 PQ の長さを θ と h で表せ.
- (3) T を平面 $z = h$ で切ったときの断面の概形を描き, その面積を θ と h で表せ.
- (4) h のとりうる値の範囲に注意して, T の体積 V を θ で表し, θ を動かしたときの V の最大値を求めよ.

[以 下 余 白]