

問 1

$a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$ について、

$$\begin{aligned} (1) \quad 3a_3 &= 5a_2 - 2a_1 \\ &= 5 \times 2 - 2 \times 1 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\text{から、} a_3 = \frac{8}{3} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $\textcircled{1}$ を変形することで、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} - \frac{2}{3}a_{n+1} = a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

の 2 通りの変形が可能。 $b_n = a_{n+1} - a_n$ のとき $\textcircled{2}$ から、

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n \quad \cdots \text{答}$$

(3) $\textcircled{2}$ より数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列だから、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (a_2 - a_1) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots \textcircled{2}' \end{aligned}$$

$\textcircled{3}$ より数列 $\left\{a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n\right\}$ は定数数列だから、

$$\begin{aligned} a_{n+1} - \frac{2}{3}a_n &= a_2 - \frac{2}{3}a_1 \\ &= \frac{4}{3} \quad \cdots \textcircled{3}' \end{aligned}$$

$\textcircled{2}' - \textcircled{3}'$ の計算より、

$$-\frac{1}{3}a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow a_n = 4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \cdots \text{答}$$

問 2

$$(1) \quad \overrightarrow{OB} = (0, 2, \sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$

であるから、 $\angle BOP = 90^\circ$ より、

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \times x + 2 \times y + \sqrt{2} \times z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\sqrt{2}y \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{AO} = (0, 0, -1)$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, y, z-1)$$

であるから、 $\cos \angle OAP = \sqrt{\frac{2}{3}}$ より、

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AO}| |\overrightarrow{AP}| \cos \angle OAP$$

$$\Leftrightarrow 0 \times x + 0 \times y + (-1)(z-1)$$

$$= \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - z = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = \frac{2}{3} \{ x^2 + y^2 + (z-1)^2 \}, \quad 1 - z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1)^2 = 2(x^2 + y^2), \quad z \leq 1$$

これに(1)の結果を代入することで、

$$(-\sqrt{2}y - 1)^2 = 2(x^2 + y^2), \quad -\sqrt{2}y \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 + 2\sqrt{2}y + 1 = 2x^2 + 2y^2, \quad y \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (1)、(2)の結果より、

$$z = -\sqrt{2}y$$

$$= -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$= -x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2} \quad (\text{等号は } x=0 \text{ のとき成立})$$

よって z の最大値は $\frac{1}{2}$ $\cdots \text{答}$

問 3

$$S = \int_0^a (x^2 - 2bx + 3c) dx$$

10 枚のカードから 3 枚を取り出す方法は ${}_{10}C_3 = 120$ (通り) あり、これらは同様に確からしい。

$$\begin{aligned} (1) \quad S &= \left[\frac{1}{3}x^3 - bx^2 + 3cx \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 - a^2b + 3ca \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$(2) \quad S = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}a^3 - a^2b + 3ca = 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 3a(ab - 3c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 3(ab - 3c) \quad (a > b > c \text{ より } a \neq 0)$$

a, b, c は全て整数であり、右辺は 3 の倍数であるから左辺も 3 の倍数である。

よって a^2 は 3 の倍数だから a も 3 の倍数である。 $\cdots \ast$

$\cdots$ 証明終り

$\ast$ 厳密には a が整数のとき、

$a = 3k + r$ (k は整数, $r = 0, 1, 2$) とすると、 $a^2 = 9k^2 + 6rk + r^2$ と書ける。よって、

a^2 が 3 の倍数 $\Leftrightarrow r^2$ が 3 の倍数
であるが、

$$r = 0 \text{ のとき, } r^2 = 0$$

$$r = 1 \text{ のとき, } r^2 = 1$$

$$r = 2 \text{ のとき, } r^2 = 4$$

だから、

a^2 が 3 の倍数 $\Leftrightarrow a$ が 3 の倍数
である。

(3) (2)の結果から $S = 0$ となるのは a が 3 の倍数のときだから、 $9 \geq a > b > c \geq 0$ から $a \geq 2$ なので、 $a^2 = 3(ab - 3c)$ の成立を $a = 3, 6, 9$ の 3 パターンで考えれば十分。

(i) $a = 3$ のとき、

$$9 = 3(3b - 3c)$$

$$\Leftrightarrow c = b - 1$$

$$\text{よって, } (3, b, b - 1), \quad 3 > b > b - 1 \geq 0$$

の形から、

$$b = 2, 1$$

のときの 2 通り。

(ii) $a = 6$ のとき、

$$36 = 3(6b - 3c)$$

$$\Leftrightarrow c = 2b - 4$$

$$\text{よって, } (6, b, 2b - 4), \quad 6 > b > 2b - 4 \geq 0$$

の形から、

$$b = 3, 2$$

のときの 2 通り。

(iii) $a = 9$ のとき、

$$81 = 3(9b - 3c)$$

$$\Leftrightarrow c = 3b - 9$$

$$\text{よって, } (9, b, 3b - 9), \quad 9 > b > 3b - 9 \geq 0$$

の形から、

$$b = 4, 3$$

のときの 2 通り。

以上より求める確率は、

$$\frac{2 + 2 + 2}{120} = \frac{1}{20} \quad \cdots \text{答}$$

問 4

$\alpha > 0, \beta > 0, x = \alpha + \beta, y = \alpha\beta$ について、

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{x^2}{y} &= \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta} \\ &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha}} + 2 \quad (\text{相加平均} \cdot \text{相乗平均の関係}) \\ &= 4\end{aligned}$$

等号成立は $\alpha = \beta$ のときであり、

このとき $\frac{x^2}{y}$ は最小値 4 をとる …答

$$(2) \quad \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^3 + \beta^3 \quad \cdots (A)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2y = x^3 - 3yx$$

$$\Leftrightarrow (3x - 2)y = x^3 - x^2$$

これは $x = \frac{2}{3}$ のとき成立しないので $x \neq \frac{2}{3}$ であり、

$$y = \frac{x^3 - x^2}{3x - 2} \quad \cdots \text{答}$$

(3) α, β を解にもつ t の 2 次方程式

$$t^2 - xt + y = 0$$

が 2 つの正の実数解をもつための条件は、

$$x^2 - 4y \geq 0, \quad x > 0, \quad y > 0 \quad \cdots \ast$$

これを全て満たすような y の存在条件を (A) の条件のもとで考えればよい。よって、

$$x^2 - 4y \geq 0$$

$$x^2 - 4 \frac{x^3 - x^2}{3x - 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(2 - x)}{3x - 2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2 - x)(3x - 2) \geq 0, \quad x \neq \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \leq 2$$

$$y > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3 - x^2}{3x - 2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x - 1)}{3x - 2} > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(3x - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{2}{3}, \quad 1 < x$$

以上と $x > 0$ とで、

$$1 < x \leq 2 \quad \cdots \text{答}$$

※ 実数 α, β について、
 $\alpha > 0$ かつ $\beta > 0$
 $\Leftrightarrow \alpha + \beta > 0$ かつ $\alpha\beta > 0$
の同値性は重要である。