

$$(1) \omega^3 = 1 \iff \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\omega \neq 1 \text{ より } \omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

よって

$$\sum_{n=1}^{2009} A^n = A^1 + A^2 + A^3 + \dots + A^{2009}$$

$$= \underline{A^1 + A^2 + E} + \underline{A^1 + A^2 + E} + \underline{A^1 + A^2 + E} + A^1 \dots\dots + \underline{A + A^2}$$

$$= 670 \cdot (A^1 + A^2 + E) - E$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 + 1 & -\omega + 1 \\ -\omega^2 + 1 & -\omega + 1 \end{pmatrix} \times 670 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore a + b + c + d = 670(-2\omega^2 - 2\omega + 4) - 2$$

$$= \underline{4018} \quad (\because ①)$$

\dots\dots(答)

$$(2) \frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{x_2}{x_2 + 3} = \dots = \frac{x_{1005}}{x_{1005} + 2009} = a \text{ とすると } (a: \text{定数})$$

$$\frac{x_n}{x_n + (2n-1)} = a \iff x_n = \frac{a}{1-a}(2n-1) \quad \dots\dots ①$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{1005} = \sum_{k=1}^{1005} \frac{a}{1-a}(2k-1)$$

$$= \frac{a}{1-a} 1005^2$$

$$= 2010$$

$$\therefore \frac{a}{1-a} = \frac{2}{1005}$$

①より

$$x_{21} = \frac{a}{1-a}(2 \cdot 21 - 1) = \underline{\underline{\frac{82}{1005}}}$$

\dots\dots(答)

$$(3) A = \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{2009}, B = \left(1 + \frac{1}{2009}\right)^{\frac{1}{21}} - 1, C = 1 - \left(1 + \left(-\frac{1}{2009}\right)\right)^{\frac{1}{21}}$$

の形から,

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{21}} - \frac{1}{21}x - 1$$

$$\text{という関数を考えると, } B - A = f\left(\frac{1}{2009}\right), A - C = f\left(-\frac{1}{2009}\right) \quad \dots\dots ①$$

$$f'(x) = \frac{1}{21}(1+x)^{-\frac{20}{21}} - \frac{1}{21}x$$

$$= \frac{1}{21}(1+x)^{-\frac{20}{21}} \left(1 - (1+x)^{\frac{20}{21}}\right)$$

$(1+x)^{\frac{20}{21}}$ は $0 < x < 1$ で 1 より大, $-1 < x < 0$ で 1 より小なので
 $f(x)$ の増減は次のようになる.

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗	0	↘	

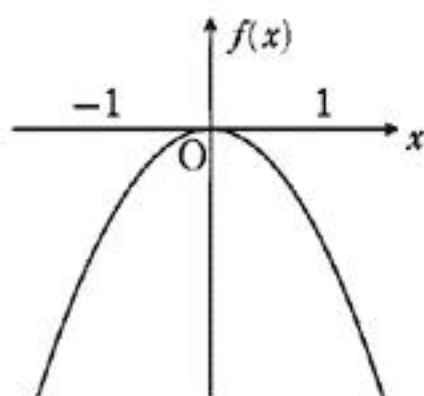
$$\text{よって } f\left(\frac{1}{2009}\right) < 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2009}\right) < 0$$

$$\text{①より } B - A < 0, A - C < 0$$

$$\therefore B < A < C$$

最大のものは C, 最小のものは B



$$(4) 5 \text{ つの数を } a, b, c, d, e \text{ とすると, } (a < b < c < d < e)$$

$$(i)(ii) \text{ より } \begin{cases} 1 \leq a < b < c < d < e \leq 19 \\ \text{どの 2 つの差も 1 より大 (2 以上)} \end{cases}$$

$$\iff 1 \leq a < b-1 < c-2 < d-3 < e-4 \leq 15$$

$$\iff 1 \leq a < b' < c' < d' < e' \leq 15$$

このような整数 (a, b', c', d', e') は ${}_{15}C_5 = 3003$ 組

b' と b, c' と c, d' と d, e' と e は 1:1 に対応するので

(a, b, c, d, e) の組は 3003 個

(1) $A(a, b, 0)$, 求める点を $B(X, Y, Z)$ とすると,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{ON} + k\overrightarrow{NA} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ -2k+2 \end{pmatrix} \quad (k \neq 0)$$

点 B は $S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ 上なので,
 $(ka)^2 + (kb)^2 + (-2k+2-1)^2 = 1$

$$\therefore k = \frac{4}{a^2 + b^2 + 4}$$

よって

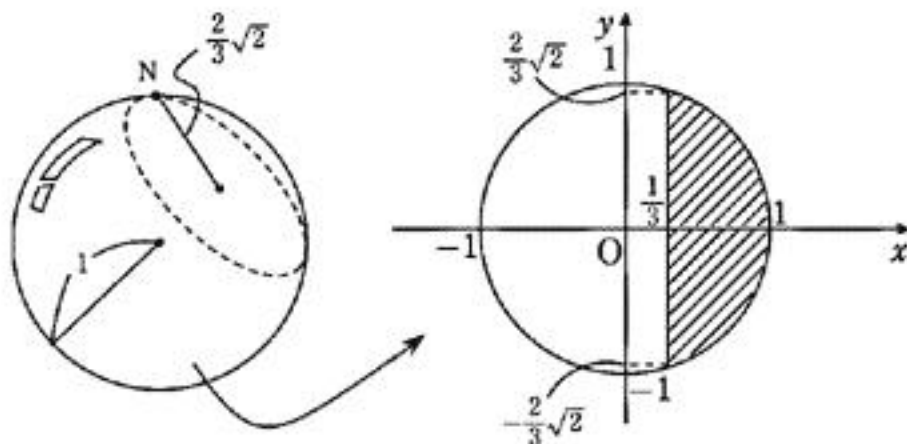
$$B\left(\frac{4a}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{4b}{a^2 + b^2 + 4}, \frac{2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2 + 4}\right)$$

(2) 点 $A(a, b, 0)$ が $x+y+1=0$ 上を動くとする. (1)より

$$\overline{NB}^2 = \frac{16}{2\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}} \text{ より } \overline{NB} \text{ の max は } \frac{4}{3}\sqrt{2} \left(a = -\frac{1}{2}\right)$$

この $\max \overline{NB}$ は L による S の断面 (円) の直径となる.

このことから下のような回転体を考え



$$\begin{aligned} V &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 \pi y^2 dx \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^1 \pi (1 - x^2) dx \\ &= \frac{28}{81} \pi \end{aligned}$$

$$\frac{\cos^n x + \cos^n y}{(\cos x + \cos y)^n} = \frac{1 + \left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)^n}{\left(1 + \left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)\right)^n}$$

$$\frac{\cos^n 2x + \cos^n 2y}{(\cos 2x + \cos 2y)^n} = \frac{1 + \left(\frac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)^n}{\left(1 + \left(\frac{\cos 2y}{\cos 2x}\right)\right)^n} \quad \text{の形より}$$

$$f(t) = \frac{1+t^n}{(1+t)^n} \quad \text{を考えると, } f'(t) = \frac{n(t^{n-1}-1)}{(1+t)^{n+1}}$$

$$n \text{ は } 1 \text{ より大きい整数なので, } f(t) \text{ は } \begin{cases} 0 < t < 1 & \text{で単調減少} \\ 1 < t & \text{で単調増加} \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

ここで, $\frac{\cos y}{\cos x}, \frac{\cos 2y}{\cos 2x}$ の大小を考えると

$$\frac{\cos y}{\cos x} - \frac{\cos 2y}{\cos 2x} = \frac{2 \cos x \cos y + 1}{\cos x \cos 2x} (\cos x - \cos y)$$

$$\text{よって } \begin{cases} 0 < x = y < \frac{\pi}{4} \text{ のとき} & \frac{\cos y}{\cos x} = \frac{\cos 2y}{\cos 2x} \\ 0 < x < y < \frac{\pi}{4} \text{ のとき} & 0 < \frac{\cos 2y}{\cos 2x} < \frac{\cos y}{\cos x} < 1 \\ 0 < y < x < \frac{\pi}{4} \text{ のとき} & 1 < \frac{\cos y}{\cos x} < \frac{\cos 2y}{\cos 2x} \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

①②より, $f(t)$ において $t = \frac{\cos y}{\cos x}$ のとき, $t = \frac{\cos 2y}{\cos 2x}$ のときを
考えて

$$\frac{\cos^n x + \cos^n y}{(\cos x + \cos y)^n} \leq \frac{\cos^n 2x + \cos^n 2y}{(\cos 2x + \cos 2y)^n} \quad (\text{等号は } x = y \text{ のとき})$$

4 題意の条件を (A) とする. $P_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ と表す.

$P_{4m} = \{1, 2, \dots, 4m\}$ を

$X_1 = \{1, 2, 3, \dots, m\}$, $X_2 = \{m+1, m+2, \dots, 2m\}$,

$X_3 = \{2m+1, 2m+2, \dots, 4m\}$ に分ける.

(1) P_{4m} のうち, X_3 はすべて (A) をみたすので,

$$f(4m) \geq (X_3 \text{ の要素数}) = 2m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

また, X_1 から (A) をみたすように選んだ集合 M_1 に含まれる各要素の 2 倍は, 全て, X_2 に含まれ, X_3 に含まれないので, ①と考える合わせて,

$$f(4m) \geq (X_3 \text{ の要素数}) + (M_1 \text{ の要素数の最大値})$$

$$\iff f(4m) \geq 2m + f(m)$$

よって

$$n \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき} \quad f(n) \geq \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right) \quad \text{が成り立つ.}$$

(2) P_{4m} のうち,

- (i) X_1 から (A) をみたすように選んだ集合の要素数の最大は 2 倍
 - (ii) X_2 から (A) をみたすように選んだ集合の要素数を a 個
 - (iii) X_3 から (A) をみたすように選んだ集合の要素数を b 個
- とすると,

(ii) の a 個の 2 倍は全て X_3 に含まれるので,

(iii) の b は

$$b \leq (X_3 \text{ の要素数}) - a = 2m - a$$

以上より, X_1, X_2, X_3 から (A) をみたすように選んだ集合の要素数は最大でも,

$$f(m) + a + (2m - a)$$

つまり $f(4m) \leq f(m) + 2m$

よって

$$n \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき, } f(n) \leq \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right) \text{ が成り立つ. //}$$

(3) (1)(2) より, n が 4 の倍数のとき

$$f(n) = \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$$

$$f(3 \cdot 2^{125}) = 3 \cdot 2^{124} + f(3 \cdot 2^{123})$$

$$= 3 \cdot 2^{124} + 3 \cdot 2^{122} + f(3 \cdot 2^{121})$$

$$= 3 \cdot 2^{124} + 3 \cdot 2^{122} + \dots + 3 \cdot 2^2 + f(3 \cdot 2)$$

$$= 3 \cdot \frac{4(4^{62} - 1)}{4 - 1} + f(6)$$

$$= 4^{63} - 4 + f(6)$$

.....①

$f(6)$ を具体的に求めると,

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を $\{1, 2\}$ $\{2, 4\}$ $\{3, 6\}$ の各集合から 1 つだけ取り出すことを考え, $M = \{1, 3, 4, 5\}$ または $\{1, 4, 5, 6\}$ として $f(6) = 4$ を得る.

よって ①より

$$f(3 \cdot 2^{125}) = 4^{63} \quad \dots\dots \text{(答)}$$