

①

$$(1) \quad 8\cos^4 x + 8\sin^4 x = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos^4 x + \sin^4 x = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\cos^2 x \sin^2 x = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos^2 x \sin^2 x = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x \sin^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

より $0 \leq 2x < 4\pi$ では、

$$2x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{2\pi}{3} + 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 2\pi, \frac{5\pi}{3} + 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{10\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

以上の和を計算して、 8π …答

(2) $\alpha < \beta$ として、

$$P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$$

とおく。このとき、

$$PQ = 1$$

$$\Leftrightarrow PQ^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \{1 + (\alpha + \beta)^2\} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)^2 = \frac{1}{1 + (\alpha + \beta)^2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立。また、線分 PQ と放物線が囲む部分の面積を S とすると、

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} -(x - \alpha)(x - \beta) dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

より①とで、

$$S = \frac{1}{6} \{(\beta - \alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{1 + (\alpha + \beta)^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1 + 0^2} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

が成立する。等号は $\alpha + \beta = 0$ のとき成立し、このとき S は

最大値 $\frac{1}{6}$ をとる。 …答

(3) a は x の整数部分、 b は x の小数部分であり、

$0 \leq b < 1$ を満たす。このとき、

$$ab = 127(a + b)$$

$$\Leftrightarrow b(a - 127) = 127a$$

について、 $a = 127$ はこれを満たさないで、

$$b = \frac{127a}{a - 127}$$

よって、

$$0 \leq b < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{127a}{a - 127} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 127a(a - 127) \quad \text{かつ} \quad \frac{126a + 127}{a - 127} < 0$$

$$\Leftrightarrow (a \leq 0 \text{ または } 127 \leq a) \quad \text{かつ} \quad -\frac{127}{126} < a < 127$$

$$\Leftrightarrow -\frac{127}{126} < a \leq 0$$

a は整数であるから、

$$a = -1, 0$$

の2通りのみ。しかし $a = 0$ のとき、 $b = 0$ となり $x \neq 0$ の条件に反する。

よって $a = -1$ であり、このとき $b = \frac{127}{128}$ となる。

$$\text{従って、} x = -1 + \frac{127}{128} = -\frac{1}{128} \quad \cdots \text{答}$$

(4) まず、点 B を yz 平面上で原点を中心として回転させた点

として点 $B'(0, 0, -\sqrt{2})$ を取る。このとき点 P の位置に依らず、

$$BP = B'P$$

が成立する。よって、

$$(AP + PB \text{ の最小値}) = (AP + PB' \text{ の最小値})$$

となる。

次に線分 $B'A$ を $1:\sqrt{2}$ の比に内分する点を考えると、

$$\left(\frac{\sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1}{1 + \sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 0}{1 + \sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) + 1 \cdot 2}{1 + \sqrt{2}} \right)$$

$$= (\sqrt{2} - 1, 0, 0)$$

と、 x 軸上の点になるので線分 $B'A$ と x 軸はこの点で交わる。

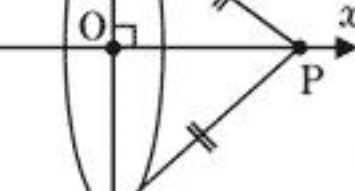
この点を P' としたとき、

$$AP + PB' \geq AP' + P'B' = AB'$$

が成立し、 $P = P'$ としたとき $AP + PB$ は最小となる。最小値は、

$$AB' = \sqrt{1^2 + 0^2 + (2 + \sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{7 + 4\sqrt{2}} \quad \cdots \text{答}$$



②

$$y = ax + 2a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$ay = x + a^2 + a \quad \cdots \textcircled{2}$$

について、

(1)

(i) $a=1$ のとき、

$$\textcircled{1} y = x + 2$$

$$\textcircled{2} y = x + 2$$

となるから共有点は直線 $y = x + 2$ 上の点全体 …答

(ii) $a=-1$ のとき、

$$\textcircled{1} y = -x + 2$$

$$\textcircled{2} y = -x$$

となるから共有点は存在しない …答

(iii) $a \neq \pm 1$ のとき、

①-②× a の計算から、

$$(1-a^2)y = a^2 - a^3$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a^2}{a+1}$$

これを②へ代入して、

$$a \times \frac{a^2}{a+1} = x + a^2 + a$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{2a^2+a}{a+1}$$

よって、共有点は $\left(-\frac{2a^2+a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right)$ …答

(2)

(i) $a=1$ のとき、 $y=x+2$ は点 $(-1, 1)$ を通る。この点は集合 B に属する点であるから $a=1$ のときは条件を満たす。

(ii) $a=-1$ のとき、 A は空集合であるから条件を満たさない。

(iii) $a \neq \pm 1$ のとき、

$$-1 \leq -\frac{2a^2+a}{a+1} \leq 0 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq \frac{a^2}{a+1} \leq 1$$

を満たす実数 a (もちろん ± 1 以外) が存在すればよく、

$$-1 \leq -\frac{2a^2+a}{a+1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{a(2a+1)}{a+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a(a+1)(2a+1) \leq (a+1)^2 \quad \text{かつ} \quad a \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \left(-1 \leq a \leq -\frac{1}{2} \text{ または } 0 \leq a\right)$$

$$\text{かつ} \quad \left(a \leq -1 \text{ または } -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{かつ} \quad a \neq -1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

また、

$$0 \leq \frac{a^2}{a+1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2(a+1) \leq (a+1)^2 \quad \text{かつ} \quad a \neq -1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq a$$

$$\text{かつ} \quad \left(a \leq -1 \text{ または } \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\text{かつ} \quad a \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

③かつ④より、 $a \neq \pm 1$ とあわせて、

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。以上(i)(ii)(iii)から、

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq a \leq -\frac{1}{2}, \quad 0 \leq a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad a=1 \quad \cdots \text{答}$$

③

(i) $0 \leq x < 1$ のとき、 $f(x) = x^3$

(ii) 任意の実数 x に対して、 $f(x+1) = f(x) + 3x^2 + 3x$

(1) $f(1+x) = f(x) + 3x^2 + 3x$ より、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\right) &= f\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{9}{4} \\ &= \frac{19}{8} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) (1)と同様に考えて、 $f(x) = f(x+1) - 3x^2 - 3x$ より

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{4}{3}\right) &= f\left(-\frac{4}{3} + 1\right) - 3\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= f\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3} \\ &= f\left(-\frac{1}{3} + 1\right) - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{3} \\ &= f\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \frac{2}{3} \\ &= -\frac{10}{27} \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(3) 任意の正数 x について、その整数部分を m 、小数部分を α とする。このとき $x = m + \alpha$ 、 $0 \leq \alpha < 1$ を満たす。

そこで、

$$\begin{aligned} f(m+\alpha) &= f(m-1+\alpha) + 3(m-1+\alpha)^2 + 3(m-1+\alpha) \\ f(m-1+\alpha) &= f(m-2+\alpha) + 3(m-2+\alpha)^2 + 3(m-2+\alpha) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f(1+\alpha) = f(0+\alpha) + 3(0+\alpha)^2 + 3(0+\alpha)$$

の辺々加えることで、

$$f(m+\alpha) = f(\alpha) + 3 \sum_{k=0}^{m-1} \{(\alpha+k)^2 + (\alpha+k)\}$$

同様に、

$$\begin{aligned} f(-m-\alpha) &= f(-m+1-\alpha) - 3(-m-\alpha)^2 - 3(-m-\alpha) \\ f(-m+1-\alpha) &= f(-m+2-\alpha) - 3(-m+1-\alpha)^2 - 3(-m+1-\alpha) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f(0-\alpha) = f(1-\alpha) - 3(0-\alpha)^2 - 3(0-\alpha)$$

の辺々加えることで、

$$\begin{aligned} f(-m-\alpha) &= f(1-\alpha) - 3 \sum_{k=0}^{m-1} \{(\alpha+k)^2 - (\alpha+k)\} \\ &\quad - 3(m+\alpha)^2 + 3(m+\alpha) \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} &f(x) + f(-x) \\ &= f(m+\alpha) + f(-m-\alpha) \\ &= f(\alpha) + 3 \sum_{k=0}^{m-1} \{(\alpha+k)^2 + (\alpha+k)\} \\ &\quad + f(1-\alpha) - 3 \sum_{k=0}^{m-1} \{(\alpha+k)^2 - (\alpha+k)\} - 3(m+\alpha)^2 + 3(m+\alpha) \\ &= f(\alpha) + f(1-\alpha) + 6 \sum_{k=0}^{m-1} (\alpha+k) - 3(m+\alpha)^2 + 3(m+\alpha) \end{aligned}$$

そこで x が整数のとき、 $\alpha = 0$ だから、

$$f(0) = 0^3 = 0, \quad f(1) = f(0) - 3 \times 0^2 + 3 \times 0 = 0 \quad \text{とで、}$$

$$\begin{aligned} &f(x) + f(-x) \\ &= f(0) + f(1) + 6 \sum_{k=0}^{m-1} k - 3 \times m^2 + 3 \times m \\ &= 0 + 0 - 6 \times \frac{1}{2} m(m-1) - 3m^2 + 3m \\ &= 0 \end{aligned}$$

また x が整数でないとき、 $0 < \alpha < 1$ だから、 $0 < 1-\alpha < 1$ で、

$$\begin{aligned} &f(x) + f(-x) \\ &= f(\alpha) + f(1-\alpha) + 6 \sum_{k=0}^{m-1} (\alpha+k) - 3(m+\alpha)^2 + 3(m+\alpha) \\ &= \alpha^3 + (1-\alpha)^3 + 6 \left\{ m\alpha + \frac{1}{2} m(m-1) \right\} \\ &\quad - 3(m^2 + 2m\alpha + \alpha^2) + 3m + 3\alpha \\ &= \alpha^3 + 1 - 3\alpha + 3\alpha^2 - \alpha^3 + 6m\alpha + 3m^2 - 3m \\ &\quad - 3m^2 - 6m\alpha - 3\alpha^2 + 3m + 3\alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

以上より、

$$f(x) + f(-x) = \begin{cases} 0 & (x \text{ は整数}) \\ 1 & (x \text{ は整数でない}) \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$