

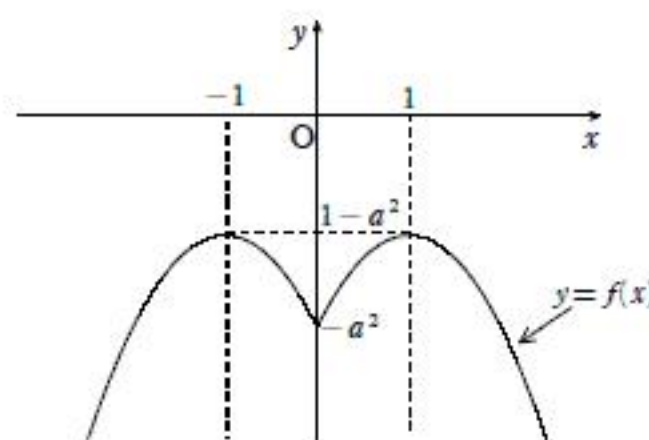
問1 $f(x) = -x^2 + 2|x| - a^2$, $g(x) = bx$, a, b は定数, $a \geq 1$

- (1) $f(-x) = -(-x)^2 + 2|-x| - a^2 = -x^2 + 2|x| - a^2 = f(x)$ より,
関数 $y = f(x)$ は偶関数で, そのグラフは y 軸に関して対称である.
 $x \geq 0$ では

$$f(x) = -(x-1)^2 + (1-a^2)$$

より, 頂点 $(1, 1-a^2)$, 軸 $x=1$ の放物線の一部, また $1-a^2 \leq 0$ である.

以上より, $y = f(x)$ のグラフは次のようになる.



.....(答)

- (2) $x \geq 0$ において直線 $y = g(x)$ が曲線 $y = f(x)$ に接する場合を
考えると, x の2次方程式 $f(x) = g(x)$ (...①') が重解をもつ. ... (A)

$$\text{①'} \iff x^2 + (b-2)x + a^2 = 0 \quad (\dots \text{①})$$

①の判別式 $D = (b-2)^2 - 4a^2$ であるから,

$$(A) \iff D = 0 \iff b = 2 \pm 2a$$

接点の x 座標は

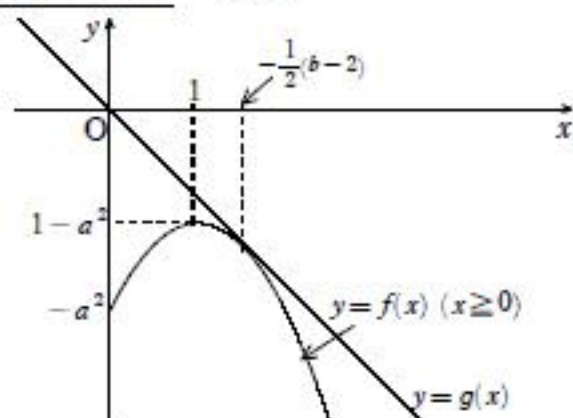
$$-\frac{1}{2}(b-2) = \mp a \quad (\text{複号同順})$$

$a \geq 1$ より $-\frac{1}{2}(b-2) = a$, すなわち

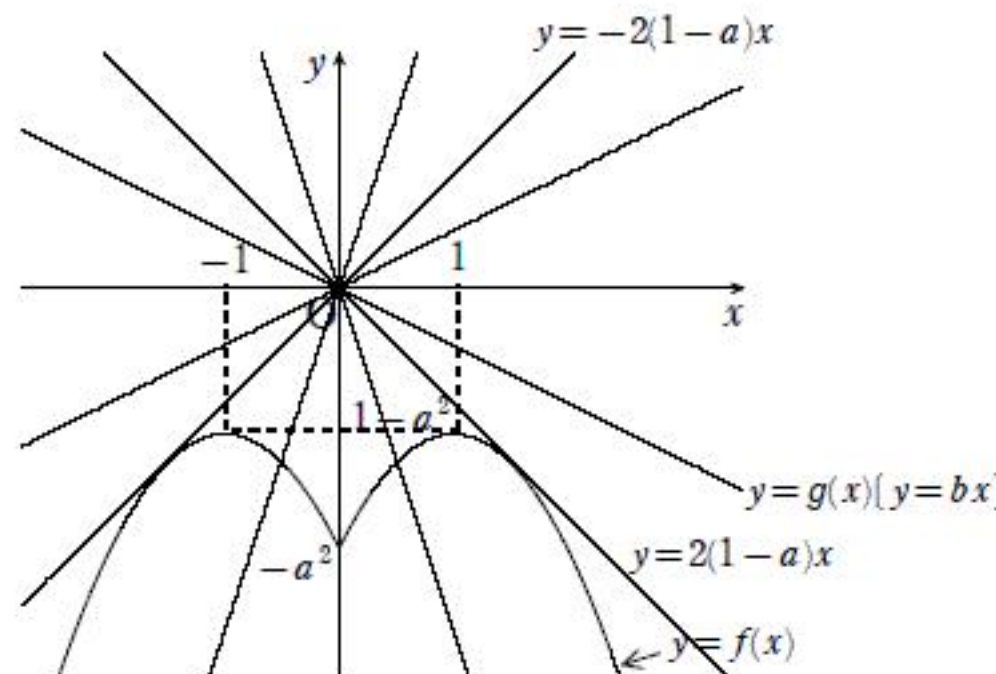
$b = 2 - 2a = 2(1-a)$ のみ適する. 曲線 $y = f(x)$ の y 軸対称性から,

$y = g(-x)$ すなわち $y = -2(1-a)x$ も $y = f(x)$ ($x \leq 0$) に接する.

よって, $b = \pm 2(1-a)$ (答)



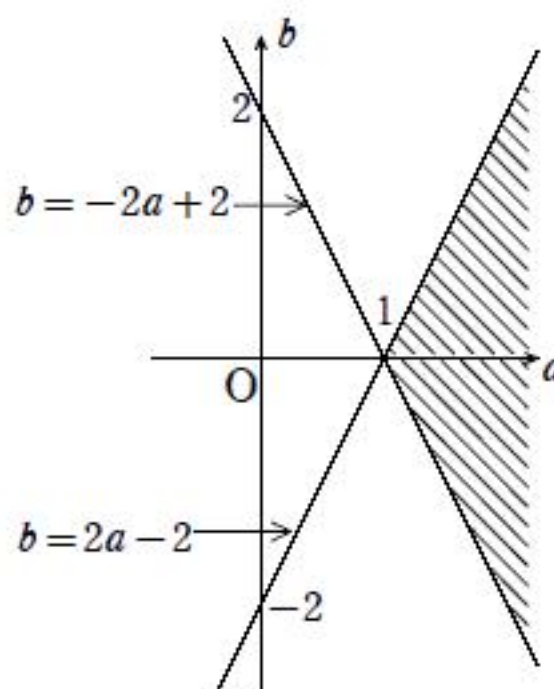
- (3)



b を変化させて, 原点を通る直線 $y = bx$ を動かすことにより,
すべての実数 x に対して $f(x) \leq g(x)$ が成り立つ, すなわち,
直線 $y = g(x)$ が曲線 $y = f(x)$ より常に上にある条件は

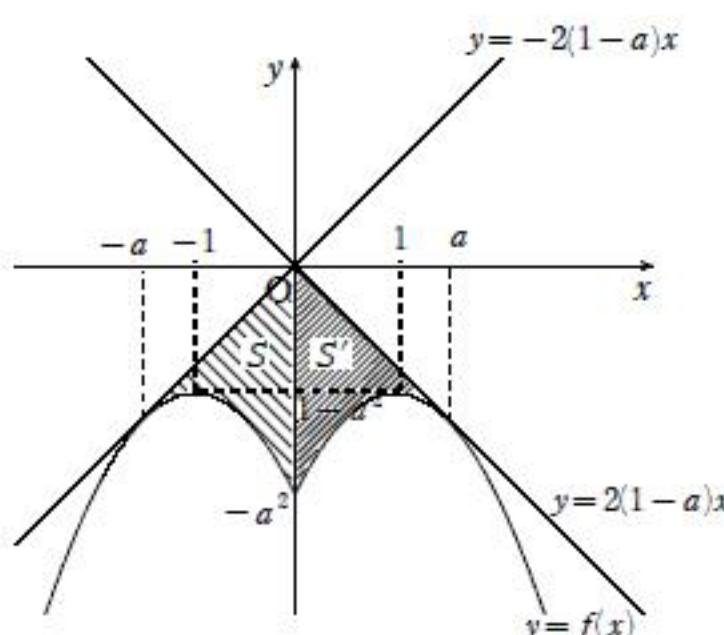
$$2(1-a) \leq b \leq -2(1-a) \quad \dots\dots(\text{答})$$

である. これを ab 平面上に図示すると, 次の斜線部の領域である.
(境界はすべて含む)



.....(答)

- (4)



求める斜線部の領域の面積 S は
 y 軸に関して対称な影の部分の面積 S' に等しい.

$$\begin{aligned} S &= S' = \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^a \{2(1-a)x - (-x^2 + 2x - a^2)\} dx \\ &= \int_0^a (x-a)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3 \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{3}(-a)^3 \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

問2 1から10までの整数が1つつ書かれた10枚のカードから同時に

3枚取り出す方法の総数は ${}_{10}C_3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ 通りあり, これらは同様に確からしい.

(1) 求める場合の数は, 2, 4, 6, 8, 10の5枚の偶数のカードから同時に3枚取り出す方法の総数 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$ 通りに等しい. よって, 求める確率は

$$\frac{{}_5C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) abc が9の倍数となる場合には, 次の2つがある.

- (i) 9が含まれる.
- (ii) 9が含まれず, abc が9の倍数となる.

(i) 残りの2枚を1~8, 10の9から選べばよいから,

$${}_9C_2 = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36 \text{ 通り}$$

(ii) 3, 6を選び, 残り1枚を1, 2, 4, 5, 7, 8, 10の7枚から選べばよいから, ${}_7C_1 = 7$ 通り.

事象 (i), (ii) は互いに排反であるから, 求める確率は

$$\frac{1}{{}_{10}C_3} ({}_9C_2 + {}_7C_1) = \frac{43}{120} \quad \dots\dots(\text{答})$$

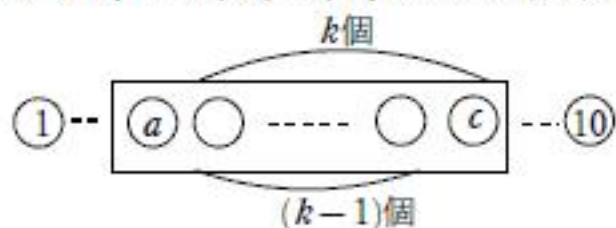
(3) $b+c \geq 9$ の余事象 $b+c < 9$ となる場合を数え上げる. $2 \leq b < c$ に注意すると,

$$(\theta, c) = \begin{cases} (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) & \longrightarrow a=1 \\ (3, 4), (3, 5) & \longrightarrow a=1, 2 \end{cases}$$

したがって, $4 \times 1 + 2 \times 2 = 8$ 通りある. よって求める確率は

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{{}_{10}C_3} &= 1 - \frac{8}{120} \\ &= 1 - \frac{1}{15} \\ &= \frac{14}{15} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(4) $c-a=k$ ($k=2, 3, \dots, 9$) となる場合を図式で示す.



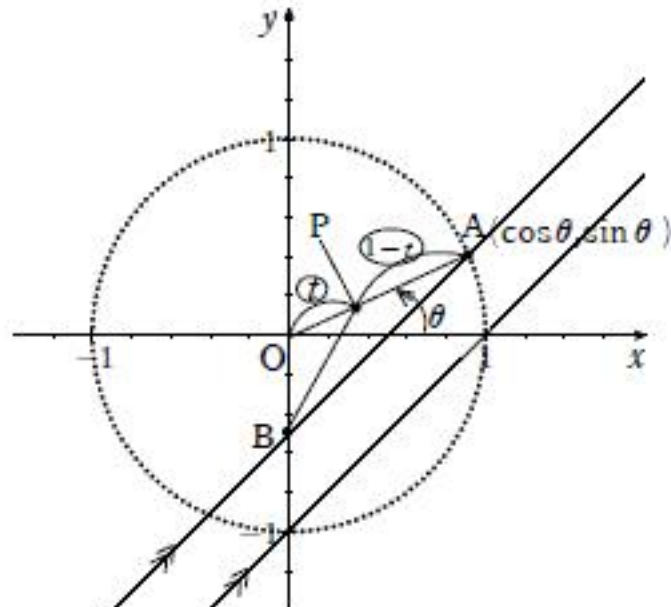
a は1から $10-k$ までの $10-k$ 通りをとりうる. そのそれぞれに対して b は $a+1$ から $c-1 (=a+k-1)$ までの $k-1$ 通りをとりうる.

a が決まると c は1通りに決まるから, 条件を満たす (a, b, c) の組は $(10-k)(k-1)$ 通り. したがって, 求める確率 $P(k)$ は

$$\frac{1}{{}_{10}C_3} (10-k)(k-1) = \frac{1}{120} (10-k)(k-1) \quad \dots\dots(\text{答})$$

(5) (4)において, k が異なる事象は排反であるから, 求める確率は

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n P(k) &= \frac{1}{120} \left\{ 10 \sum_{k=2}^n (k-1) - \sum_{k=2}^n k(k-1) \right\} \\ &= \frac{1}{120} \left[10 \sum_{k=2}^n (k-1) - \sum_{k=2}^n \frac{1}{3} \{ (k+1)k(k-1) - k(k-1)(k-2) \} \right] \\ &= \frac{1}{120} \left\{ 10 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - \frac{1}{3} (n+1)n(n-1) \right\} \\ &= \frac{1}{120} n(n-1) \left\{ 5 - \frac{1}{3} (n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{360} n(n-1)(14-n) \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(1) 直線 AB の方程式は $y - \sin \theta = 1 \cdot (x - \cos \theta)$ すなわち

$$y = x + (\sin \theta - \cos \theta)$$

よって, $B(0, \sin \theta - \cos \theta)$ (答)

また, $\overline{OP} = t \overline{OA}$ より $P(t \cos \theta, t \sin \theta)$ (答)

(2) $l = BP$ であるから,

$$\begin{aligned} l^2 &= (t \cos \theta)^2 + \{(t \sin \theta) - (\sin \theta - \cos \theta)\}^2 \\ &= t^2 - 2t \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta)^2 \\ &= t^2 - t \{(1 - \cos 2\theta) - \sin 2\theta\} + (1 - \sin 2\theta) \\ &\quad (\because 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta, 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta) \\ &= -(1-t) \sin 2\theta + t \cos 2\theta + (t^2 - t + 1) \dots\dots (答) \end{aligned}$$

(3) $l^2 = \sqrt{t^2 + (1-t)^2} \sin(2\theta + \alpha) + (t^2 - t + 1)$

$$\left(\cos \alpha = \frac{-(1-t)}{\sqrt{t^2 + (1-t)^2}}, \sin \alpha = \frac{t}{\sqrt{t^2 + (1-t)^2}} \right)$$

$0 \leq t \leq 1$ より, $\cos \alpha \leq 0, \sin \alpha \geq 0$ から, $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$ とできる.

θ が $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき,

$2\theta + \alpha$ は $\alpha - \frac{\pi}{2} \leq 2\theta + \alpha \leq \alpha + \frac{\pi}{2}$ の範囲を動く.

$\sqrt{t^2 + (1-t)^2} > 0$ であるから, l^2 は $2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$

すなわち, $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ のとき, 最大値

$$L(t) = \sqrt{t^2 + (1-t)^2} + (t^2 - t + 1) \dots\dots (答)$$

(4) $\sqrt{t^2 + (1-t)^2} = s$ とおくと,

$$s^2 = 2(t^2 - t) + 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

$0 \leq t \leq 1$ より, $\frac{1}{2} \leq s^2 \leq 1$,

$s > 0$ より, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq s \leq 1 \dots\dots ①$

$$L(t) = s + \left(\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(s+1)^2 \dots\dots ②$$

$0 \leq t \leq 1$ における $L(t)$ の最大値は, ①における②の最大値であり,

$s=1 (\Leftrightarrow t=0,1)$ のとき, 最大値 2 をとる.(答)

