

[1]

(1) $\frac{14}{3} < x < 5$ のとき $4 + \frac{2}{3} < x < 5$, $2 < \frac{3}{7}x < 2 + \frac{1}{7}$ だから、

$$\begin{aligned}\left[\frac{3}{7}x\right] - \left[\frac{3}{7}[x]\right] &= 2 - \left[\frac{3}{7} \times 4\right] \\ &= 2 - \left[1 + \frac{5}{7}\right] \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$

(2) 任意の x について、 $2m + k \leq x < 2m + k + 1$ ($k = 0, 1$) を満たす整数 m , k の組がただ 1 つ存在する。…※
このとき、

$$m + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}x < m + \frac{k+1}{2}$$

であり、

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{2}x\right] - \left[\frac{1}{2}[x]\right] &= m - \left[\frac{1}{2}(2m + k)\right] \\ &= m - \left[m + \frac{k}{2}\right] \\ &= m - m \quad (\because 0 \leq \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} < 1) \\ &= 0 \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$

(3) 任意の x について、 $nm + k \leq x < nm + k + 1$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) を満たす整数 m , k の組がただ 1 つ存在する。…※

このとき、

$$m + \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n}x < m + \frac{k+1}{n}$$

であり、

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{n}x\right] - \left[\frac{1}{n}[x]\right] &= m - \left[\frac{1}{n}(nm + k)\right] \\ &= m - \left[m + \frac{k}{n}\right] \\ &= m - m \quad (\because 0 \leq \frac{k}{n} \leq \frac{n-1}{n} < 1) \\ &= 0 \quad \dots \text{答}\end{aligned}$$

[Ⅱ]

(1) A による変換を f とする。 $l_1: y=1$ について、

l_1 上の点 $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ の f による像は、

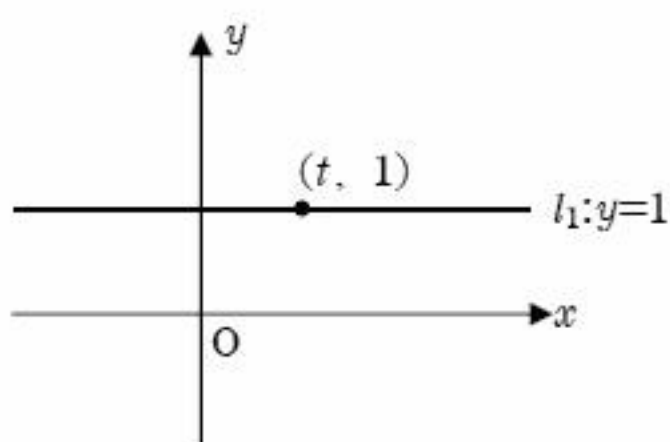
$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$$

より、これは t の変化により軌跡として直線

$$y = -\frac{1}{a}(x-1) + a$$

をえがく。よって、

$$l_2: y = -\frac{1}{a}x + a + \frac{1}{a} \quad \cdots \text{答}$$



また l_2 上の点 $\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ の f^{-1} による像は、

$$\frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix} + \frac{t}{a^2+1} \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

より、これは t の変化により軌跡として直線

$$y = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{a^2+1} \right) + \frac{a}{a^2+1}$$

をえがく。よって、

$$l_3: y = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $l_1: y=1$, $l_2: y = -\frac{1}{a}x + a + \frac{1}{a}$ を連立させることで、

$$P(a^2 - a + 1, 1) \quad \cdots \text{答}$$

$l_1: y=1$, $l_3: y = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ を連立させることで、

$$Q(a-1, 1) \quad \cdots \text{答}$$

$l_2: y = -\frac{1}{a}x + a + \frac{1}{a}$, $l_3: y = \frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ を連立させることで、

$$R\left(\frac{1}{2}a^2, \frac{a}{2} + \frac{1}{a}\right) \quad \cdots \text{答}$$

(3) $\overrightarrow{QP} = (a^2 - 2a + 2, 0)$

$$\overrightarrow{QR} = \left(\frac{1}{2}a^2 - a + 1, \frac{1}{2}a + \frac{1}{a} - 1 \right)$$

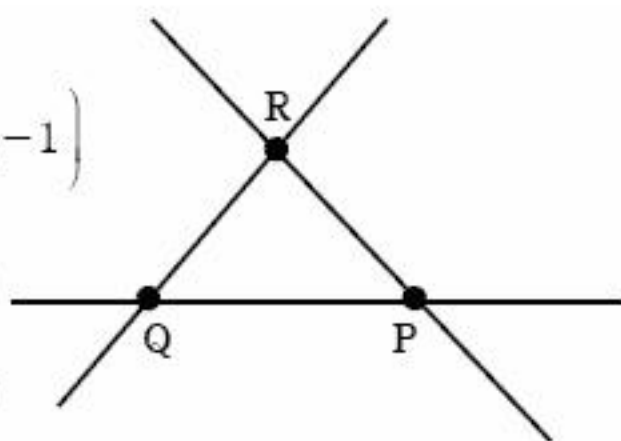
について、

$$a^2 - 2a + 2 = (a-1)^2 + 1 > 0$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{a} - 1 = \frac{(a-1)^2 + 1}{2a} > 0$$

を満たす。よって、

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2} \left| (a^2 - 2a + 2) \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{a} - 1 \right) - 0 \times \left(\frac{1}{2}a^2 - a + 1 \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} (a^2 - 2a + 2) \frac{a^2 - 2a + 2}{2a} \\ &= \frac{1}{4a} (a^2 - 2a + 2)^2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$



(4) $4S'(a) = \frac{(a^2 - 2a + 2)(3a^2 - 2a - 2)}{a^2}$

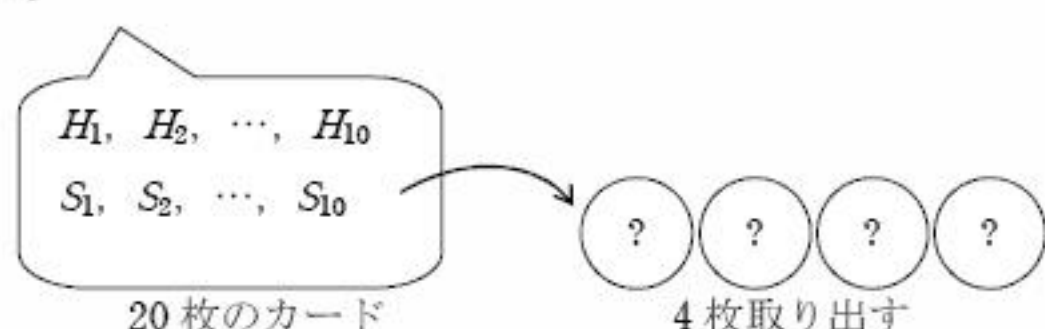
$$= \frac{3 \left\{ (a-1)^2 + 1 \right\} \left(a - \frac{1+\sqrt{7}}{3} \right) \left(a - \frac{1-\sqrt{7}}{3} \right)}{a^2}$$

a	(0)	...	$\frac{1+\sqrt{7}}{3}$	...
$S'(a)$		-	0	+
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

増減表より $S(a)$ は $a = \frac{1+\sqrt{7}}{3}$ で極小かつ最小となる。 $\cdots$ 答

[Ⅲ]

ハートの1～ハートの10のカードをそれぞれ $H_1, H_2, \dots, H_{10}$ 、
 スペードの1～スペードの10のカードをそれぞれ $S_1, S_2, \dots, S_{10}$
 とする。



(1) $P(A_1)$: 4枚中に H_1, S_1 が含まれる確率

について、 H_1, S_1 と、残り18枚から2枚を取り出したときであるので、

$$P(A_1) = \frac{1 \times 1 \times {}_{18}C_2}{{}_{20}C_4} = \frac{3}{5 \times 19} = \frac{3}{95} \quad \dots \text{答}$$

(2) $P(A_1 \cap A_2)$: 4枚中に H_1, S_1, H_2, S_2 が含まれる確率
 について、 H_1, S_1, H_2, S_2 を取り出したときであるので、

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1 \times 1 \times 1 \times 1}{{}_{20}C_4} = \frac{1}{15 \times 17 \times 19} = \frac{1}{4845} \quad \dots \text{答}$$

※このような計算もできる。(もちろん面倒になるが)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) - P(A_1 \cap \overline{A_2}) \\ &= \frac{3}{95} - \frac{1 \times 1 \times ({}_{18}C_2 - 1)}{4845} = \frac{1}{4845} \end{aligned}$$

(3) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$: 4枚中に第1対、または第2対、
 または第3対が含まれる確率
 について、

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_3 \cap A_1) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{aligned}$$

が成立する。設定の対等性から、

$$P(A_i) = P(A_j),$$

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_j \cap A_k) = P(A_k \cap A_i) \quad (i, j, k \text{ は全て異なる})$$

を満たし、 $A_1 \sim A_3$ の3つの事象は同時に起こらないことから

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 3P(A_1) - 3P(A_1 \cap A_2) \\ &= 3 \times \frac{3}{5 \times 19} - 3 \times \frac{1}{15 \times 17 \times 19} \\ &= \frac{9 \times 3 \times 17 - 3 \times 1}{15 \times 17 \times 19} \\ &= \frac{8}{85} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(4) 求める確率は、

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6)$$

とかける。よって、設定の対等性と、 $A_1 \sim A_6$ の6つの事象の
 うち3つ以上の事象は同時に起こらないことから、

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6)$$

$$= \sum_{i=1}^6 P(A_i)$$

$$- \sum_{1 \leq i < j \leq 6} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

$$- \sum_{1 \leq i < j < k < l \leq 6} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l)$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j < k < l < m \leq 6} P(A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l \cap A_m)$$

$$- P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6)$$

$$= 6P(A_1) - {}_6C_2 P(A_1 \cap A_2)$$

$$+ {}_6C_3 \times 0 - {}_6C_4 \times 0$$

$$+ {}_6C_5 \times 0 - 0$$

$$= 6 \times \frac{3}{5 \times 19} - 15 \times \frac{1}{15 \times 17 \times 19}$$

$$= \frac{18 \times 3 \times 17 - 15}{15 \times 17 \times 19}$$

$$= \frac{301}{1615} \quad \dots \text{答}$$

[IV]

(1) 図のように長さ l の辺を底辺とするような 2 つの二等辺三角形をあわせた四角形の面積が最大となる。

このとき、余弦定理より

$$l^2 = x^2 + x^2 - 2x \cdot x \cos \theta$$

$$= 2x^2 - 2x^2 \cos \theta$$

$$l^2 = y^2 + y^2 - 2y \cdot y \cos(\pi - \theta)$$

$$= 2y^2 + 2y^2 \cos \theta$$

から、 $-1 < \cos \theta < 1$ とで、

$$x^2 = \frac{l^2}{2(1 - \cos \theta)},$$

$$y^2 = \frac{l^2}{2(1 + \cos \theta)}$$

また正弦定理より

$$\frac{l}{\sin \theta} = 2r$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{l}{2r}$$

よって、

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin \theta + \frac{1}{2} y^2 \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta (x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta \left\{ \frac{l^2}{2(1 - \cos \theta)} + \frac{l^2}{2(1 + \cos \theta)} \right\}$$

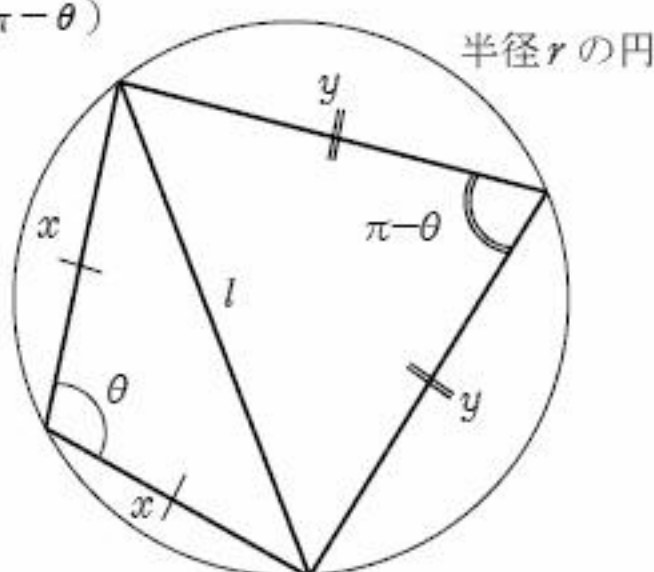
$$= \frac{1}{2} \sin \theta \times \frac{2l^2}{2(1 - \cos^2 \theta)}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta \times \frac{l^2}{\sin^2 \theta}$$

$$= \frac{l^2}{2 \sin \theta}$$

$$= \frac{l^2}{2 \times \frac{l}{2r}}$$

$$= rl \quad \dots \text{答}$$



(2) $0 < l \leq 2r$ より、

$$S = rl \leq r \times 2r = 2r^2$$

を満たす。また等号の成立は

$l = 2r$ のとき、

つまり長さ l の辺が円の直径と

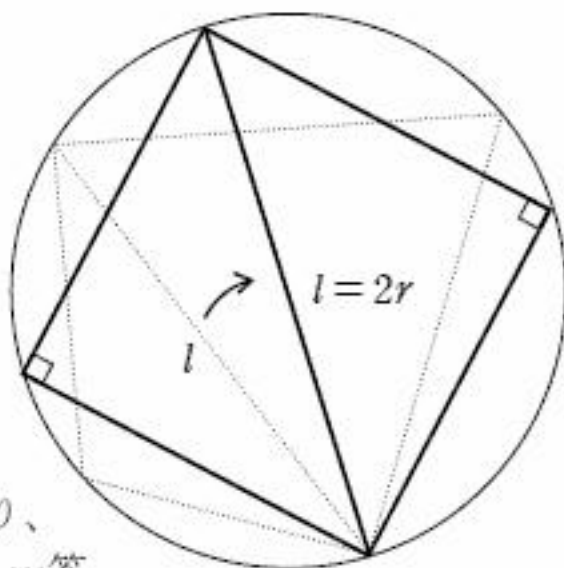
一致するときであるが、この

ような状態は存在する。

このときできる四角形は

一辺の長さが $\sqrt{2}r$ の正方形であり、

その面積は最大値 $2r^2$ となる。 $\dots$ 答



(3) $OA = OB = OC = OD$ であるから、頂点 O から

四角形 $ABCD$ を含む平面へ下ろした垂線の足 H は

四角形 $ABCD$ の外接円の中心である。

このときの外接円の半径を r 、

四角形 $ABCD$ の面積を S 、

四角錐の体積を V とすると、

$$V = \frac{1}{3} \times S \times OH$$

$$= \frac{1}{3} S \sqrt{1 - r^2}$$

となる。(2)より $S \leq 2r^2$ である

から、

$$V \leq \frac{1}{3} \times 2r^2 \times \sqrt{1 - r^2}$$

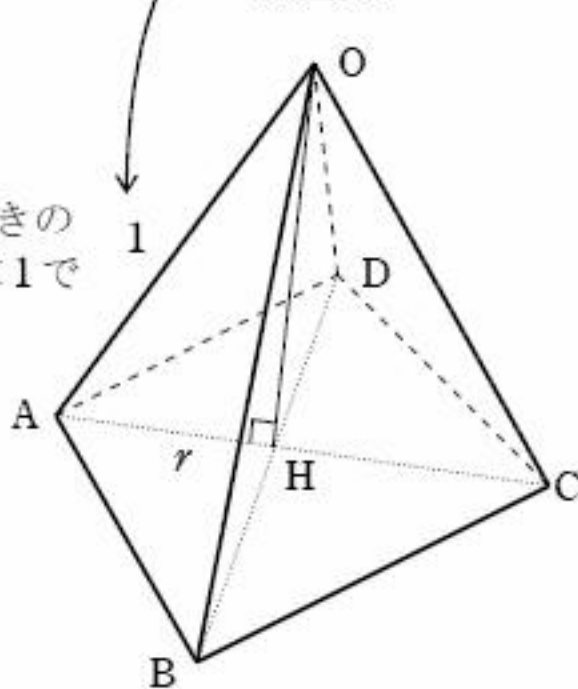
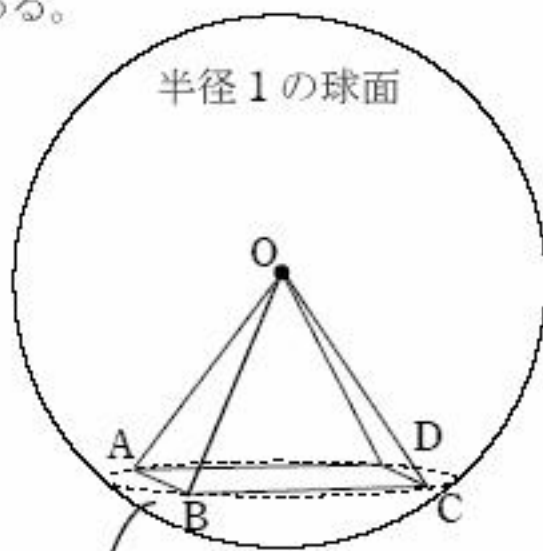
$$= \frac{2}{3} r^2 \sqrt{1 - r^2}$$

となる。これが r を固定したときの

V の最大値で、この r を $0 < r < 1$ で

変化させたときの最大値が

体積の最大値となる。



よって、 V を r で微分して、

$$V' = \frac{2r(2 - 3r^2)}{3\sqrt{1 - r^2}}$$

と増減表とで、 V は $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ で極大かつ

最大となる。

r	(0)	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	(1)
$V'(r)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$V(r)$	$\times$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$\times$

以上より最大値は、

$$V\left(r = \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{27} \quad \dots \text{答}$$

[V]

$$(1) \quad f(x) = e^x (e^{px} - 1)$$

$$f'(x) = e^x \{ (p+1)e^{px} - 1 \} \text{ より、}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (p+1)e^{px} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{px} = \frac{1}{p+1}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{p} \log(p+1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{p} \log(p+1)$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって上の増減表から $f(x)$ は $x = -\frac{1}{p} \log(p+1)$ で

極小かつ最小であるから、

$$s_p = -\frac{1}{p} \log(p+1) \quad \cdots \text{答}$$

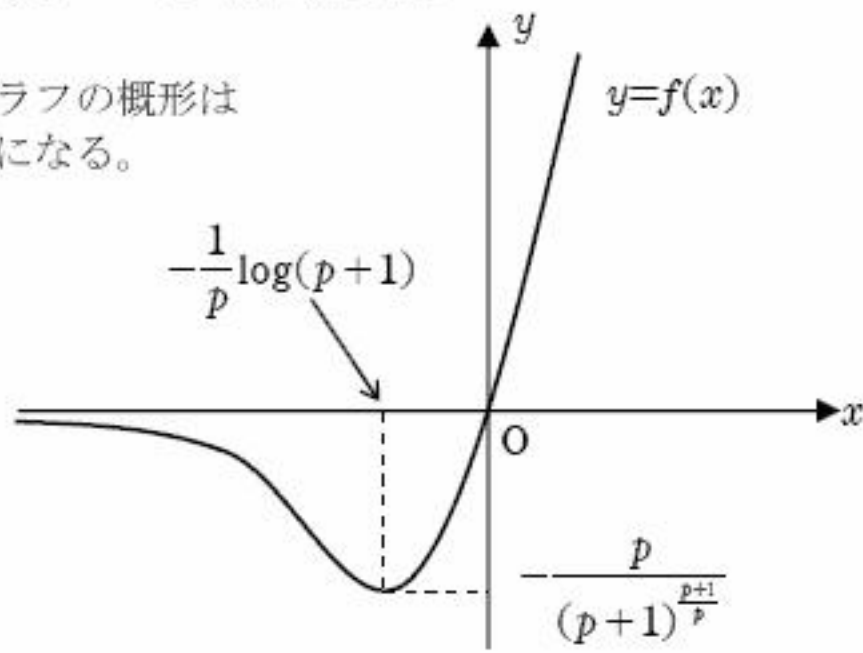
また、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0 \quad (x \text{ 軸は漸近線})$$

とで、グラフの概形は

下のようになる。



$$\begin{aligned}
 (2) \quad g(t) &= \int_t^{t+1} f(x) e^{t-x} dx \\
 &= \int_t^{t+1} e^x (e^{px} - 1) e^{t-x} dx \\
 &= e^t \int_t^{t+1} (e^{px} - 1) dx \\
 &= e^t \left[\frac{1}{p} e^{px} - x \right]_t^{t+1} \\
 &= e^t \left\{ \frac{1}{p} (e^p - 1) e^{pt} - 1 \right\}
 \end{aligned}$$

より、

$$g'(t) = e^t \left\{ \frac{p+1}{p} (e^p - 1) e^{pt} - 1 \right\}$$

から、

$$g'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{pt} = \frac{p}{(p+1)(e^p - 1)}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{p} \log \frac{p}{(p+1)(e^p - 1)}$$

t	$\cdots$	$\frac{1}{p} \log \frac{p}{(p+1)(e^p - 1)}$	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、上の増減表から $g(t)$ は $t = \frac{1}{p} \log \frac{p}{(p+1)(e^p - 1)}$ で

極小かつ最小であるから、

$$t_p = \frac{1}{p} \log \frac{p}{(p+1)(e^p - 1)} \quad \cdots \text{答}$$

$$(3) \quad t_p - s_p$$

$$= \frac{1}{p} \log \frac{p}{(p+1)(e^p - 1)} + \frac{1}{p} \log(p+1)$$

$$= \frac{1}{p} \{ \log p - \log(p+1) - \log(e^p - 1) + \log(p+1) \}$$

$$= \frac{1}{p} \log \frac{p}{e^p - 1}$$

について、与えられた不等式

$$0 < 1 + \frac{p}{2} \leq \frac{e^p - 1}{p} \leq 1 + \frac{p}{2} + p^2$$

から、

$$0 < \frac{1}{1 + \frac{p}{2} + p^2} \leq \frac{p}{e^p - 1} \leq \frac{1}{1 + \frac{p}{2}}$$

よって、

$$\frac{1}{p} \log \frac{1}{1 + \frac{p}{2} + p^2} \leq \frac{1}{p} \log \frac{p}{e^p - 1} \leq \frac{1}{p} \log \frac{1}{1 + \frac{p}{2}}$$

が成立する。

$$\text{最右辺} = -\frac{1}{p} \log \left(1 + \frac{p}{2} \right)$$

$$= -\log \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{\frac{2}{p}}$$

について、 $y = \log x$ の連続性とで、

$$\lim_{p \rightarrow +0} \left\{ -\frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{p}{2} \right)^{\frac{2}{p}} \right\} = -\frac{1}{2} \log e = -\frac{1}{2}$$

$$\text{※} \lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \text{ の利用に持ち込む。}$$

$$\text{最左辺} = -\frac{1}{p} \log \left(1 + \frac{p}{2} + p^2 \right)$$

$$= -\frac{\frac{p}{2} + p^2}{p} \log \left(1 + \frac{p}{2} + p^2 \right)^{\frac{1}{\frac{p}{2} + p^2}}$$

$$= -\left(\frac{1}{2} + p \right) \log \left(1 + \frac{p}{2} + p^2 \right)^{\frac{1}{\frac{p}{2} + p^2}}$$

について、

$$\lim_{p \rightarrow +0} \left\{ -\left(\frac{1}{2} + p \right) \log \left(1 + \frac{p}{2} + p^2 \right)^{\frac{1}{\frac{p}{2} + p^2}} \right\} = -\left(\frac{1}{2} + 0 \right) \log e = -\frac{1}{2}$$

$$\text{※} \frac{p}{2} + p^2 = q \text{ とおくと } p \rightarrow +0 \text{ のとき } q \rightarrow +0 \text{ であるから、}$$

$$\lim_{p \rightarrow +0} \log \left(1 + \frac{p}{2} + p^2 \right)^{\frac{1}{\frac{p}{2} + p^2}} = \lim_{q \rightarrow +0} \log(1+q)^{\frac{1}{q}} = \log e \text{ である。}$$

以上よりはさみうちの原理より、

$$\lim_{p \rightarrow +0} \frac{1}{p} \log \frac{p}{e^p - 1} = -\frac{1}{2} \quad \cdots \text{答}$$