

数 学

(問 題)

2009年度

〈2009 H21030015 (数学)〉

注 意 事 項

1. 問題冊子および記述解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～5ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷の乱れ、解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。欄外の余白には何も記入しないこと。
4. 試験が開始されたらただちに、解答用紙の所定欄（2か所）に、受験番号および氏名を正確に丁寧に記入すること。
5. 試験終了の指示が出たら、すぐに解答をやめ、筆記具を置くこと。終了の指示に従わず解答を続けた場合は、答案のすべてを無効とするので注意すること。
6. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の にあてはまる数または文字を解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) $\omega^3 = 1, \omega \neq 1$ とし, $A = \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\omega \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

$\sum_{n=1}^{2009} A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と表すと, $a + b + c + d =$ ア である。

(2) $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{1005}$ が,

$$\begin{cases} \frac{x_1}{x_1 + 1} = \frac{x_2}{x_2 + 3} = \frac{x_3}{x_3 + 5} = \dots = \frac{x_{1005}}{x_{1005} + 2009} \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{1005} = 2010 \end{cases}$$

をみたすとき, $x_{21} =$ イ である。

(3) $A = \frac{1}{21 \cdot 2009}, B = \left(1 + \frac{1}{2009}\right)^{\frac{1}{21}} - 1, C = 1 - \left(1 - \frac{1}{2009}\right)^{\frac{1}{21}}$ とする。

これらの中で最大のものは ウ , 最小のものは エ である。

には A, B, C の文字を入れよ。

(4) 1 から 19 までの整数の集合を S とする。 S の部分集合 A で, 次の2つの条件をみたすものを考える。

(i) A は5個の要素からなる。

(ii) A のどの2つの要素の差も1より大きい。

このような A は全部で オ 個ある。

2 xyz 空間の球面 $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ を S とし、直線 $x+y+1=0, z=0$ を ℓ とする。 S 上の点 $N(0,0,2)$ と ℓ を含む平面を L とする。次の問に答えよ。

- (1) 点 $(a,b,0)$ と N を通る直線と S との交点のうち、 N と異なる点の座標を a, b で表せ。
- (2) S を表面とする球は、平面 L によって2つの図形に分けられる。このとき、小さい方の図形の体積を求めよ。

3 n は1より大きい整数とし、 $0 < x < \frac{\pi}{4}, 0 < y < \frac{\pi}{4}$ とする。

$\frac{\cos^n x + \cos^n y}{(\cos x + \cos y)^n}$ と $\frac{\cos^n 2x + \cos^n 2y}{(\cos 2x + \cos 2y)^n}$ の大小を判定せよ。

4 正の整数 n に対して、集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 M で条件

$$m \in M \text{ ならば } 2m \notin M$$

をみたすものを考える。このような集合 M に対して M の要素の個数を $g(M)$ とするとき、 $g(M)$ の取りうる最大値を $f(n)$ と表す。
次の問に答えよ。

- (1) n が4の倍数のとき、 $f(n) \geq \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$ が成り立つことを示せ。
- (2) n が4の倍数のとき、 $f(n) \leq \frac{n}{2} + f\left(\frac{n}{4}\right)$ も成り立つことを示せ。
- (3) $f(3 \cdot 2^{125})$ を求めよ。

[以 下 余 白]

