

数 学 問 題

2009年度

〈 H21030017 〉

注 意 事 項

1. この試験では，この問題冊子のほかに，解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は，試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 試験終了の指示がでたら，すぐに解答を止め，筆記具を置いてください。終了の指示に従わず解答を続けた場合は，答案のすべてを無効とするので注意してください。
8. 問題冊子は持ち帰ってください。
9. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] 実数 x に対して、 x 以下の最大の整数を $[x]$ で表す。以下の問に答えよ。

- (1) $\frac{14}{3} < x < 5$ のとき、 $[\frac{3}{7}x] - [\frac{3}{7}[x]]$ を求めよ。
- (2) すべての実数 x について、 $[\frac{1}{2}x] - [\frac{1}{2}[x]] = 0$ を示せ。
- (3) n を正の整数とする。実数 x について、 $[\frac{1}{n}x] - [\frac{1}{n}[x]]$ を求めよ。

[II] $a > 0$ に対し、行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

で定める。 xy 平面上の直線 $y = 1$ を ℓ_1 とする。 ℓ_1 の各点を行列 A で表される 1 次変換で移してできる直線を ℓ_2 とし、 ℓ_1 の各点を A の逆行列 A^{-1} で表される 1 次変換で移してできる直線を ℓ_3 とする。また、 ℓ_1 と ℓ_2 の交点を P 、 ℓ_1 と ℓ_3 の交点を Q 、 ℓ_2 と ℓ_3 の交点を R とし、 $\triangle PQR$ の面積を $S(a)$ とする。以下の問に答えよ。

- (1) 直線 ℓ_2 と直線 ℓ_3 の方程式を求めよ。
- (2) 3 点 P, Q, R の座標を求めよ。
- (3) $S(a)$ を求めよ。
- (4) $S(a)$ を最小にする a を求めよ。

[III] トランプのハートとスペードの 1 から 10 までのカードが 1 枚ずつ総計 20 枚ある。 $i = 1, 2, \dots, 10$ に対して、番号 i のハートとスペードのカードの組を第 i 対とよぶことにする。20 枚のカードの中から 4 枚のカードを無作為に取り出す。取り出された 4 枚のカードの中に第 i 対が含まれているという事象を A_i で表すとき、以下の問に答えよ。

- (1) 事象 A_1 が起こる確率 $P(A_1)$ を求めよ。
- (2) 確率 $P(A_1 \cap A_2)$ を求めよ。
- (3) 確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ を求めよ。
- (4) 取り出された 4 枚のカードの中に第 1 対、第 2 対、第 3 対、第 4 対、第 5 対、第 6 対の中の少なくとも 1 つが含まれる確率を求めよ。

[IV] 以下の問に答えよ。

- (1) 半径 r の円に内接し、1つの対角線の長さが l であるような四角形の面積の最大値を r と l で表せ。
- (2) 半径 r の円に内接する四角形の面積の最大値を求めよ。
- (3) 空間内の点 O を頂点とし、四角形 $ABCD$ を底面とする四角錐(すい)が $OA = OB = OC = OD = 1$ を満たしているとする。そのような四角錐の体積の最大値を求めよ。

[V] 実数 $p > 0$ に対して、

$$f(x) = e^{(p+1)x} - e^x$$

とおく。以下の問に答えよ。

- (1) $f(x)$ が最小となる x の値 s_p を求め、 $y = f(x)$ のグラフを描け。

(2)

$$g(t) = \int_t^{t+1} f(x) e^{t-x} dx$$

とおく。 $g(t)$ が最小となる t の値 t_p を求めよ。

- (3) $0 < p \leq 1$ のとき、

$$1 + \frac{p}{2} \leq \frac{e^p - 1}{p} \leq 1 + \frac{p}{2} + p^2$$

が成立することを用いて、右側からの極限 $\lim_{p \rightarrow +0} (t_p - s_p)$ を求めよ。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。