

0	 1 枚
1	 1 枚
2	 2 枚
3	 3 枚
4	 4 枚
5	 5 枚

全 16 枚 同時に 2 枚の取り出し方は ${}_{16}C_2 = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ 通り

- (1) 「得点が 1 点」 $\iff$ 「同じ数のカードが 2 枚出る」ときだから、その取り出し方は、
 ${}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$ 通り

$\therefore$ (答) 20 通り

※カードの区別をつけないとき、4 通りと考えられるが、(2)以降での確率を考えると 20 通りとするのが問題の流れに合う解答と考えられる。

- (2) 取り出される 2 枚のカードの組には、次の 3 通りに場合分けができる。
 (カードの数を a, b とする)

- (i) $a \neq 0, a = b$ のとき (得点) = 1 点
- (ii) $a \neq 0, a < b$ のとき (得点) = b 点
- (iii) $a = 0, a < b$ のとき (得点) = $2b$ 点

得点 4 点以上は (ii) (iii) のときを調べればよい。得点を X とおくと、
 ($a = 0$ のとき)

残りの 1 枚は 2 $\sim$ 5 の 14 枚のどれでもよく
 $1 \times {}_{14}C_1 = 14$ 通り

($a = 1$ のとき)

残りの 1 枚は 4 $\sim$ 5 の 9 枚のどれでもよく
 $1 \times {}_9C_1 = 9$ 通り

($a = 2$ のとき)

残りの 1 枚は 4 $\sim$ 5 の 9 枚のどれでもよく
 $2 \times {}_9C_1 = 18$ 通り

($a = 3$ のとき)

残りの 1 枚は 4 $\sim$ 5 の 9 枚のどれでもよく
 $3 \times {}_9C_1 = 27$ 通り

($a = 4$ のとき)

残りの 1 枚は 5 の 5 枚のどれでもよく
 $4 \times {}_5C_1 = 20$ 通り

全て合わせて、 $14 + 9 + 18 + 27 + 20 = 88$ 通りとわかり、

$$\therefore \text{(答)} p(X \geq 4) = \frac{88}{120} = \frac{11}{15}$$

- (3) 得点が偶数となるとき、(2) の (ii), (iii) の場合で調べる。

($a = 0$ のとき)

残りの 1 枚は どれでもよく
 $1 \times {}_{15}C_1 = 15$ 通り

($a = 1$ のとき)

残りの 1 枚は 2, 4 の 6 枚のどれでもよく
 $1 \times {}_6C_1 = 6$ 通り

($a = 2$ のとき)

残りの 1 枚は 4 の 4 枚のどれでもよく
 $2 \times {}_4C_1 = 8$ 通り

($a = 3$ のとき)

残りの 1 枚は 4 の 4 枚のどれでもよく
 $3 \times {}_4C_1 = 12$ 通り

全て合わせて、 $15 + 6 + 8 + 12 = 41$ 通り

$$\therefore \text{(答)} p(X = \text{偶数}) = \frac{41}{120}$$

$$(1) \text{ 点 } D \text{ の } x \text{ 座標は, } \frac{1 \times 0 + 3 \times 2}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$y \text{ 座標は, } \frac{1 \times 9 + 3 \times 0}{3+1} = \frac{9}{4}$$

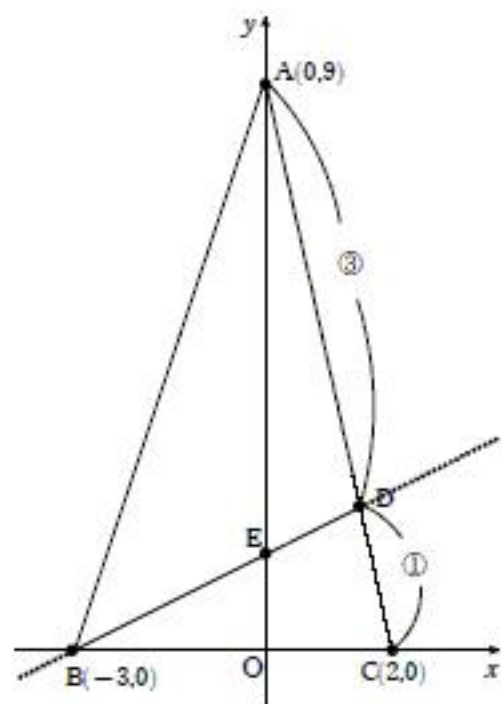
これより, 点 $D\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ とわかる.

次に直線 BD の方程式を求める.

$$y = \frac{\frac{9}{4} - 0}{\frac{3}{2} - (-3)}(x+3) \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

これより, 点 $E\left(0, \frac{3}{2}\right)$ とわかり,

$$\begin{aligned} OE : EA &= \frac{3}{2} : 9 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{3}{2} : \frac{15}{2} \\ &= 1 : 5 \end{aligned}$$



$\therefore$ (答) $OE : EA = 1 : 5$

(2) 直線 CE の方程式を求める.

$$y = \frac{0 - \frac{3}{2}}{2 - 0}x + \frac{3}{2} \iff y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \dots\dots ①$$

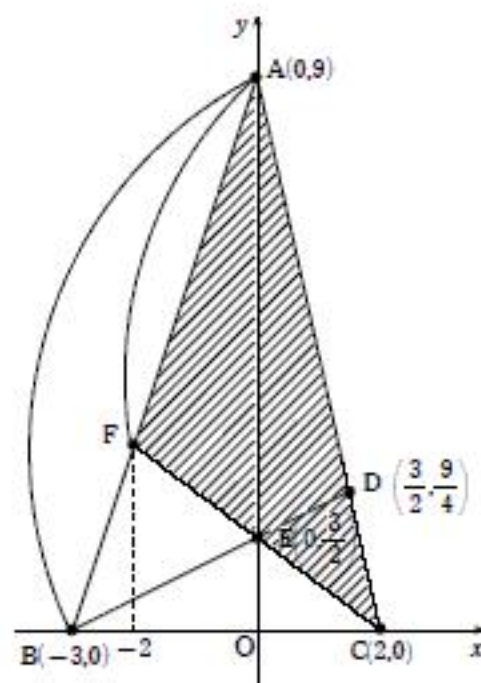
さらに, 直線 AB の方程式は $y = 3x + 9 \dots\dots ②$ より

①, ②を連立して交点 F を求めると, 点 $F(-2, 3)$

$\triangle AFC$ の面積は, $\triangle ABC$ の面積の $\frac{AF}{AB}$ (倍)

x 軸上に正射影した長さの比より,

$$\begin{aligned} \frac{AF}{AB} &= \frac{2}{3} \\ \therefore \text{(答)} \quad &\frac{2}{3} \text{ (倍)} \end{aligned}$$



(注) チェバの定理を使うと, $\frac{AF}{FB} \times \frac{BO}{OC} \times \frac{CD}{DA} = 1$ に代入して $\frac{AF}{FB} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = 1$

$\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{2}{1}$ となり, $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{2+1}$ と簡単に求められる.

$$(1) \quad a_1 = \frac{A \sin \theta}{1 + \sin \theta}, \quad a_2 = \frac{(A - 2a_1) \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\left(A - \frac{2A \sin \theta}{1 + \sin \theta}\right) \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{A(1 - \sin \theta) \sin \theta}{(1 + \sin \theta)^2}$$

$$\text{これより, } \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{A(1 - \sin \theta) \sin \theta}{(1 + \sin \theta)^2}}{\frac{A \sin \theta}{1 + \sin \theta}} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\therefore (\text{答}) \quad \frac{a_2}{a_1} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$(2) \quad a_n - a_{n-1} = \frac{\{A - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})\} \sin \theta}{1 + \sin \theta} - \frac{\{A - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2})\} \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$= \frac{-2a_{n-1} \cdot \sin \theta}{1 + \sin \theta} \quad (n \geq 3)$$

$$\Leftrightarrow a_n = \left(1 - \frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta}\right) a_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore (\text{答}) \quad a_n = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} a_{n-1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{また, (1) より } a_2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} a_1 \\ \text{よって, } \underline{n=2 \text{ のときも成立}} \end{array} \right)$$

$$(3) \quad (1), (2) \text{ より 数列 } \{a_n\} \text{ は, 初項 } a_1 = \frac{A \sin \theta}{1 + \sin \theta}, \text{ 公比 } \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \text{ の等比数列.}$$

これより

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$= \frac{A \sin \theta}{1 + \sin \theta} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^n \right\}$$

$$= \frac{1 - \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}{1 - \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}}$$

$$= \frac{\frac{A \sin \theta}{1 + \sin \theta} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^n \right\}}{\frac{2 \sin \theta}{1 + \sin \theta}} \quad \therefore (\text{答}) \quad S_n = \frac{A}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \right)^n \right\} \quad (n \geq 1)$$

(1) 直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ と曲線 $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

の交点は, $4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (8x+1)(x-1) = 0 \quad \therefore x = -\frac{1}{8}, 1$$

2 交点は $\left(-\frac{1}{8}, \frac{25}{16}\right), (1, 1)$ とわかる.

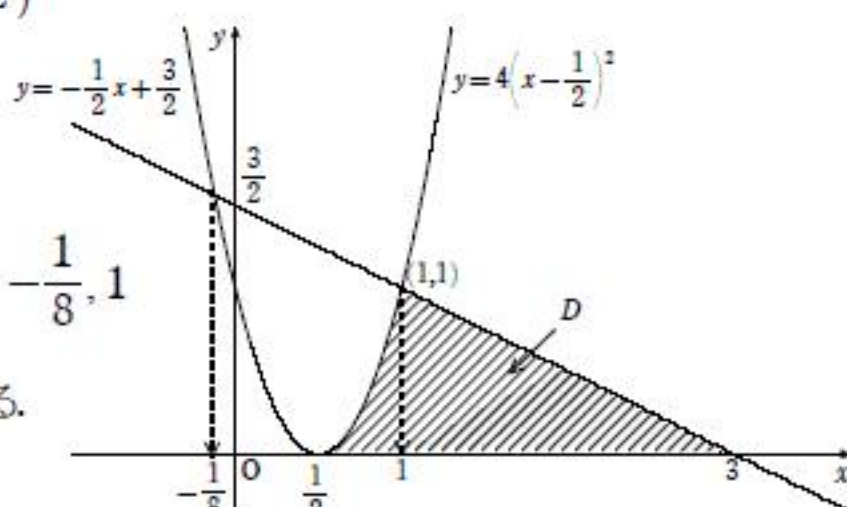
求める面積 S は,

$$S = \int_{-\frac{1}{8}}^1 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \cdot (3-1) \cdot 1$$

$$= \left[\frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_{-\frac{1}{8}}^1 + 1$$

$$= \frac{7}{6}$$

$$\therefore (\text{答}) S = \frac{7}{6}$$



(2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{2 点 } \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1) \text{ を結ぶ傾きは } 2 \\ \text{点 } (1, 1) \text{ での } y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ の接線の傾きは } 4 \end{array} \right\}$

(i) $0 < a \leq 2$ で固定するとき,

$y = ax + b$ が $(x, y) = (3, 0)$ を通るとき

b が最小になるので

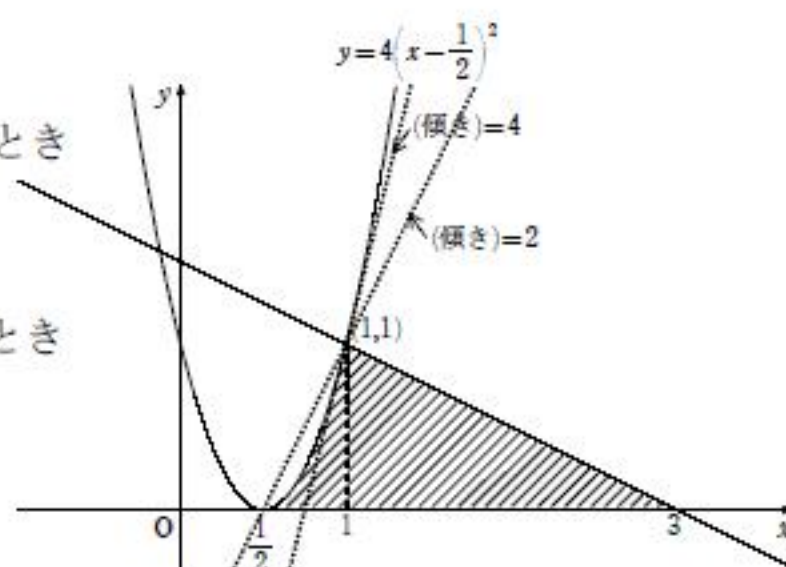
$$0 = 3a + b \Leftrightarrow b = -3a$$

$y = ax + b$ が $(x, y) = (1, 1)$ を通るとき

b が最大になるので

$$1 = a + b \Leftrightarrow b = 1 - a$$

$$\therefore \underline{-3a \leq b \leq 1 - a} \quad (0 < a \leq 2)$$



(ii) $2 < a$ で固定するとき,

b の最小は, (i) と同じく $b = -3a$

$y = ax + b$ が $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ を通るとき,

b が最大となるので

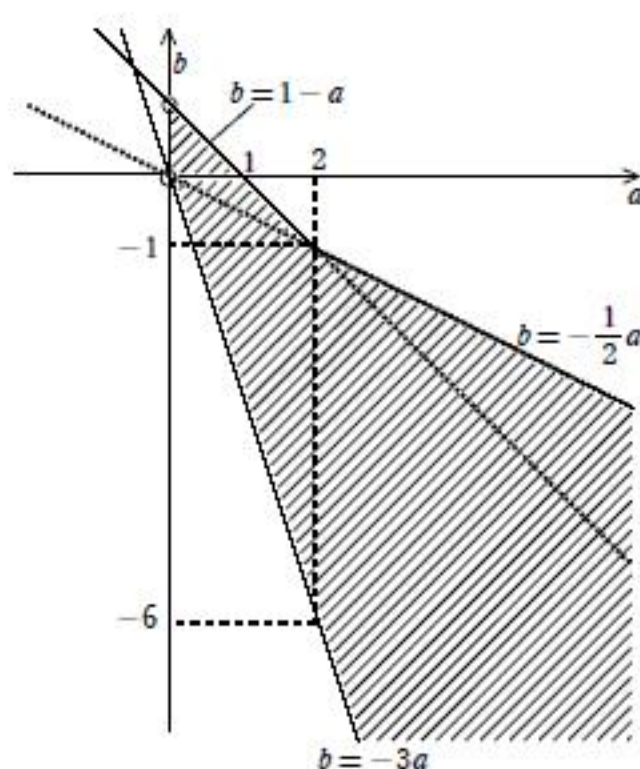
$$0 = \frac{1}{2}a + b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}a$$

$$\therefore \underline{-3a \leq b \leq -\frac{1}{2}a} \quad (2 < a)$$

以上(i), (ii) を $a-b$ 平面に図示する.

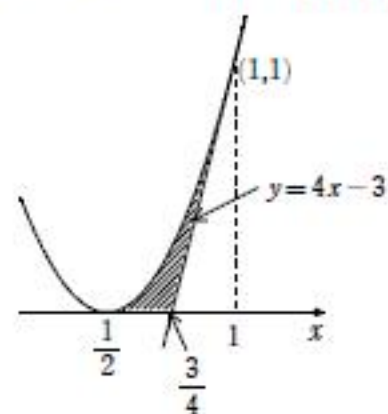
$$\therefore (\text{答}) \begin{cases} -3a \leq b \leq 1 - a & (0 < a \leq 2) \\ -3a \leq b \leq -\frac{1}{2}a & (2 < a) \end{cases}$$

よって, 領域は右図の斜線部分である.
ただし, b 軸上の $0 \leq b \leq 1$ の部分は除く
(破線上)



(3) (2) で曲線 $y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ 上の点 $(1, 1)$ の接線の傾きは

4 であるので下の斜線部分の面積を求めてみると,



$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^1 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) \cdot 1 \\ &= \left[\frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^3 \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

となり, S の半分 $\left(\frac{7}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\right)$ より小さいとわかる.

したがって, $y = 4x + b$ を右へ平行移動し

直線 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$, x 軸との交点をそれぞれ

点 P, Q とする. さらに, $R(3, 0)$ とおく.

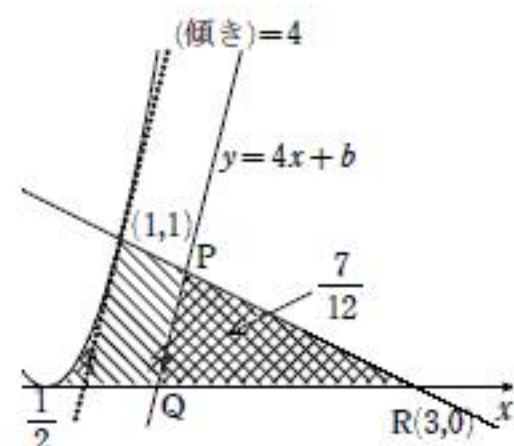
$$\text{点 } P\left(\frac{3-2b}{9}, \frac{12+b}{9}\right), \text{点 } Q\left(-\frac{b}{4}, 0\right)$$

(ii) より, $a = 4$ のとき $\underline{-12 \leq b \leq -2}$ と考えてよい.

$$(\text{三角形 } PQR \text{ の面積}) = \frac{1}{2} \times \left(3 + \frac{b}{4}\right) \times \frac{12+b}{9}$$

$$= \frac{1}{72} (12+b)^2 = \frac{7}{12}$$

$$(12+b)^2 = 42 \quad \therefore b = -12 \pm \sqrt{42}$$



ここで, ①より,

$$\therefore (\text{答}) b = -12 + \sqrt{42}$$