

1

- (1) ☐ア 72
 (2) ☐イ 2 ☐ウ 3
 (3) ☐エ 290445
 (4) ☐オ $\frac{2\sqrt{3}}{27}$

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} 2a+3b &= 42 \\ \Leftrightarrow 2(a-15)+3(b-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(a-15) &= -3(b-4) \end{aligned}$$

より、2 と -3 は互いに素であるから、整数 k を持ちいて、

$$\begin{aligned} 2k &= b-4 \\ \Leftrightarrow b &= 2k+4 \\ -3k &= a-15 \\ \Leftrightarrow a &= -3k+15 \end{aligned}$$

である。よって、

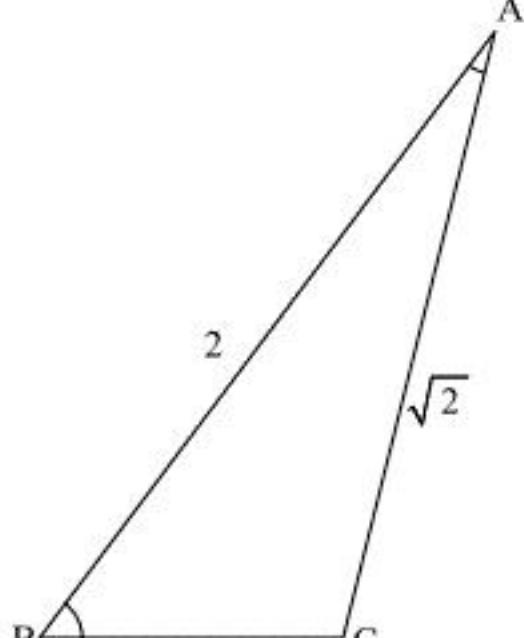
$$\begin{aligned} ab &= (-3k+15)(2k+4) \\ &= -6k^2+18k+60 \\ &= -6\left(k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{147}{2} \end{aligned}$$

より、 ab は $k=1, 2$ のとき最大値をとり、その値は、

$$-6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{147}{2}=72$$

である。

(2)



余弦定理を用いて、

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{4+2-1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{4+1-2}{2\cdot 2\cdot 1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha-1 \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 3\beta &= 4\cos^3\beta-3\cos\beta \\ &= -\frac{9}{16} \end{aligned}$$

より、

$$\cos 2\alpha = -\cos 3\beta$$

である。よって、

$$2\alpha = \pi - 3\beta$$

であるから、

$$2\alpha + 3\beta = \pi$$

である。

(3)

(iii)より、数列 $\{a_n\}$ の初項は 1 である。公差を d と置くと、

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

であるから、

$$a_3 = 2d+1$$

$$a_6 = 5d+1$$

$$a_{10} = 9d+1$$

である。これらが等比数列となっているので、その公比を r と置くと、

$$5d+1 = r(2d+1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$9d+1 = r^2(2d+1) \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。①、②より、

$$\begin{aligned} 9d+1 &= \left(\frac{5d+1}{2d+1}\right)^2(2d+1) \\ \Leftrightarrow (2d+1)(9d+1) &= (5d+1)^2 \\ \Leftrightarrow 7d\left(d-\frac{1}{7}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow d &= 0, \frac{1}{7} \end{aligned}$$

である。 $d \neq 0$ より、

$$d = \frac{1}{7}$$

であり、これより、

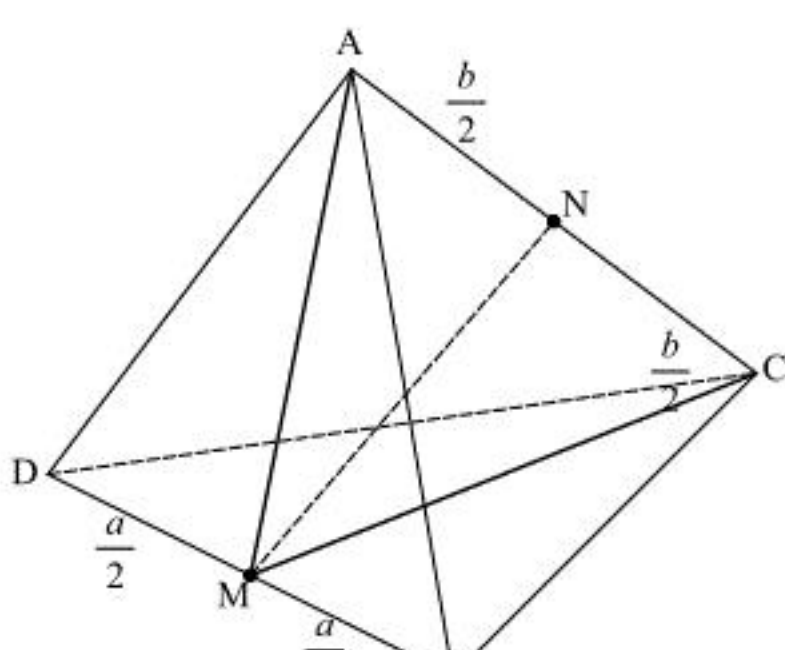
$$\begin{aligned} a_n &= 1 + (n-1)\cdot\frac{1}{7} \\ &= \frac{6}{7} + \frac{1}{7}n \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2010} \left(\frac{6}{7} + \frac{1}{7}k\right) &= \frac{6}{7} \cdot 2010 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2010 \cdot 2011 \\ &= 290445 \end{aligned}$$

である。

(4)



$$BD = a, \quad AC = b$$

と置く。 $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから、辺 BD の中点を M と置くと、

$$DM = BM = \frac{a}{2}$$

である。よって、 $\triangle ADM$ に三平方の定理を用いて、

$$AM = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

である。四面体の対称性から、辺 AC の中点を N と置くと、

$$AM = CM$$

であり、 $\triangle ANM$ に三平方の定理を用いて、

$$MN = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

であるから、四面体 $ABCD$ の面積は、 $\triangle ACM$ の面積を S と置くと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot S \cdot BD &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} b \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \cdot a \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{-a^4 b^2 + (4b^2 - b^4) a^2} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{-b^2 \left\{ \left(a^2 - \left(\frac{4-b^2}{2} \right) \right)^2 - \left(\frac{4-b^2}{2} \right)^2 \right\}} \end{aligned}$$

と表すことができる。 $b^2 = t$ として、根号の中身は、 $a^2 = \frac{4-b^2}{2}$ のとき、最大となり、このとき、四面体 $ABCD$ の体積も最大となる。その最大値は、

$$\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{4} (t^3 - 8t^2 + 16t)}$$

であり、これは

$$f(t) = t^3 - 8t^2 + 16t$$

が最大のとき、最大値をとる。

$$\begin{aligned} f'(t) &= 3t^2 - 16t + 16 \\ &= (3t-4)(t-4) \end{aligned}$$

より、 $f(t)$ の増減表は次のようになる。ここで、

$$a^2 = \frac{4-t}{2} \geq 0$$

より、

$$0 \leq t \leq 4$$

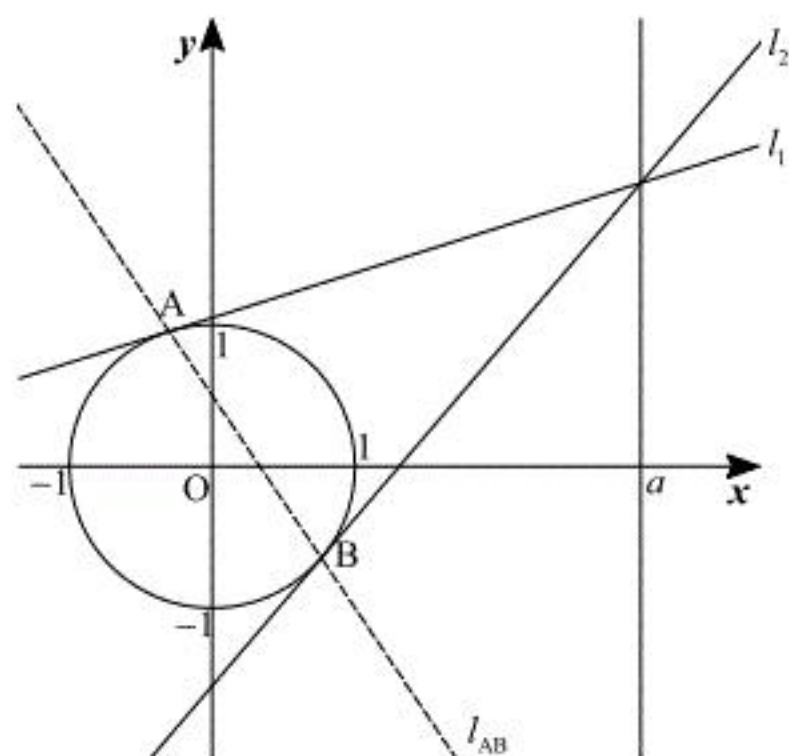
である。

t	0	...	$\frac{4}{3}$	...	4
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		↗	極大	↘	

これより、四面体 $ABCD$ の体積の最大値は、

$$\frac{1}{12} \sqrt{\frac{1}{4} f\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$$

である。



$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると、接線の公式より、2つの接線 l_1, l_2 は、

$$l_1: x_1x + y_1y = 1$$

$$l_2: x_2x + y_2y = 1$$

と表すことができる。これらは直線 $x=a$ 上の点 P を通る。点 P の座標を (a, Y) と置くと、

$$x_1a + y_1Y = 1$$

$$x_2a + y_2Y = 1$$

であり、これは、 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ が直線 $ax + Yy = 1$ 上にあることを意味している。よって、2点 A, B を通る直線の方程式は、

$$ax + Yy = 1$$

$$\Leftrightarrow ax - 1 + yY = 0$$

である。これが点 P の座標に依らずに通る定点の座標は、

$$ax - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}$$

$$y = 0$$

より、

$$\left(\frac{1}{a}, 0 \right)$$

である。

(証明終)

(答) $\left(\frac{1}{a}, 0 \right)$

3

(1)

①において、

$$y' = 2x$$

より、直線 ℓ_1 の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= 2\alpha(x - \alpha) + \alpha^2 + 1 \\ &= 2\alpha x - \alpha^2 + 1 \end{aligned}$$

と表すことができる。同様に、直線 ℓ_2 の方程式は、

$$y = 2\beta x - \beta^2 + 1$$

と表すことができる。よって、点 P の x 座標は、

$$\begin{aligned} 2\alpha x - \alpha^2 + 1 &= 2\beta x - \beta^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 2(\alpha - \beta)x &= (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

であるから、点 P の y 座標は、

$$\begin{aligned} y &= 2\beta \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \beta^2 + 1 \\ &= \alpha\beta + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta + 1\right)$

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha, \alpha\beta + 1 - (\alpha^2 + 1) \right) \\ &= \left(\frac{-\alpha + \beta}{2}, \alpha(\beta - \alpha) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta, \alpha\beta + 1 - (\beta^2 + 1) \right) \\ &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2}, \beta(\alpha - \beta) \right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= \left(\frac{-\alpha + \beta}{2} \right)^2 + \{ \alpha(\beta - \alpha) \}^2 \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2 + 4\alpha^2(\alpha - \beta)^2}{4} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2(4\alpha^2 + 1)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BP}|^2 &= \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \{ \beta(\alpha - \beta) \}^2 \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2 + 4\beta^2(\alpha - \beta)^2}{4} \\ &= \frac{(\alpha - \beta)^2(4\beta^2 + 1)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= \frac{-\alpha + \beta}{2} \cdot \frac{\alpha - \beta}{2} + \alpha(\beta - \alpha) \cdot \beta(\alpha - \beta) \\ &= \frac{-(\alpha - \beta)^2 - 4\alpha\beta(\alpha - \beta)^2}{4} \\ &= -\frac{(4\alpha\beta + 1)(\alpha - \beta)^2}{4} \end{aligned}$$

であるから、三角形 APB の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AP}|^2 |\overrightarrow{BP}|^2 - (\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)^4 (4\alpha^2 + 1)(4\beta^2 + 1)}{16} - \frac{(4\alpha\beta + 1)^2 (\alpha - \beta)^4}{16}} \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{4(\alpha - \beta)^6} \\ &= \frac{1}{4} |\alpha - \beta|^3 \end{aligned}$$

である。対称性から $\alpha > \beta$ とすると、この面積は、

$$\frac{1}{4} (\alpha - \beta)^3$$

となる。対称性から①と②の頂点を結んだ線分の中点が点 P であり、①、②の頂点の座標はそれぞれ、

$$(0, 1), (t, t)$$

より、

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{t}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta = t$$

$$\alpha\beta + 1 = \frac{t+1}{2} \Leftrightarrow \alpha\beta = \frac{t-1}{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{4} (\alpha - \beta)^3 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (\alpha - \beta)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{4} (t^2 - 2t + 2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。

(答) $S(t) = \frac{1}{4} (t^2 - 2t + 2)^{\frac{3}{2}}$

(3)

$$t^2 - 2t + 2 = (t - 1)^2 + 1$$

より、 $t = 1$ のとき、 $S(t)$ は最小値

$$\frac{1}{4} (1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

をとる。

(答) $\frac{1}{4}$