

(1) $x=n$ は $f(x)=0, g(x)=0$ の共通の整数解より

$$f(n)=n^3+3n^2+mn+3=0 \quad \dots\dots ①$$

$$g(n)=n^3+mn^2+(m+3)n+4=0 \quad \dots\dots ②$$

ここで、②-①より

$$(m-3)n^2+3n+1=0 \iff n(mn-3n+3)=-1 \quad \dots\dots ③$$

m, n は整数より、 $n \neq 0$ が必要 (絞り込み)

(i) $n=1$ のとき、③より $m=-1$ とわかり、

$$\begin{cases} f(x)=x^3+3x^2-x+3 \\ g(x)=x^3-x^2+2x+4 \end{cases}$$

となるが $f(1) \neq 0, g(1) \neq 0$ となり不適.

(ii) $n=-1$ のとき、③より $m=5$ とわかり、

$$\begin{cases} f(x)=x^3+3x^2+5x+3 \\ \quad = (x+1)(x^2+2x+3) \\ g(x)=x^3+5x^2+8x+4 \\ \quad = (x+1)(x+2)^2 \end{cases}$$

となり、 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ は共通解 $x=(n)=-1$ をもち十分.

これより、(ii) の場合で考えればよく、

$$f(x)=0 \iff (x+1)(x^2+2x+3)=0 \iff (x+1)\{(x+1)^2+2\}=0$$

$$\therefore \quad \underline{\text{(答) } x=-1, -1 \pm \sqrt{2}i}$$

(2) (1) より、

$$g(x)=x^3+5x^2+8x+4$$

$$g'(x)=3x^2+10x+8=(3x+4)(x+2)$$

増減表を描くと右の通りとなる.

増減表より

x	...	-2	...	$-\frac{4}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	(極大)	↘	(極小)	↗

$\therefore$ (答) $x=-2$ で極大値をとり、(極大値) $=g(-2)=0$

$$x=-\frac{4}{3} \text{ で極小値をとり、(極小値) } =g\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{4}{27}$$

(3) $f(x)-g(x)=(x^3+3x^2+5x+3)-(x^3+5x^2+8x+4)$

$$=-2x^2-3x-1$$

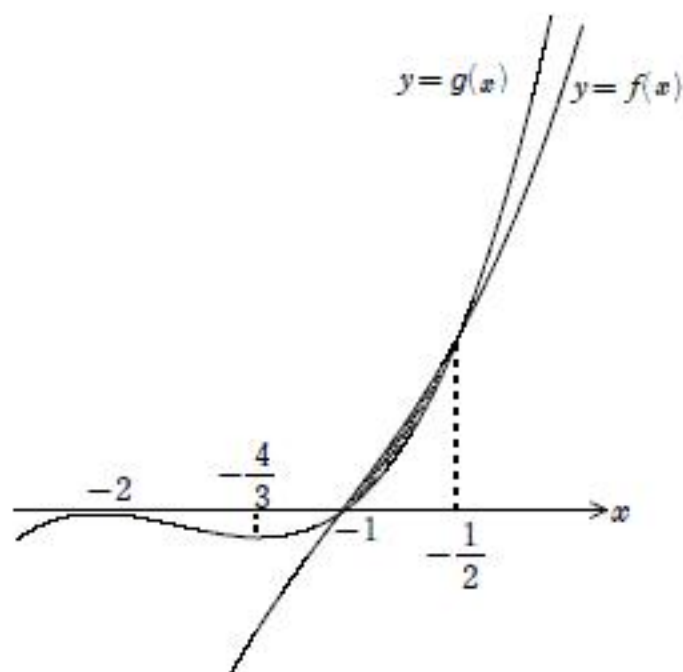
$$=-(2x+1)(x+1)$$

これと、(1)、(2) により関数 $y=f(x), y=g(x)$ を描くと右図の通りとなる.

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \{f(x)-g(x)\} dx \\ &= -\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (2x+1)(x+1) dx \\ &= \frac{2}{6} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{(答) } S = \frac{1}{24}$$



(1) $f(x)=x\int_{-1}^1 f(t)dt+1$ ここで、 $A=\int_{-1}^1 f(t)dt$ とおく.

これより、 $f(x)=Ax+1$ と表せる.

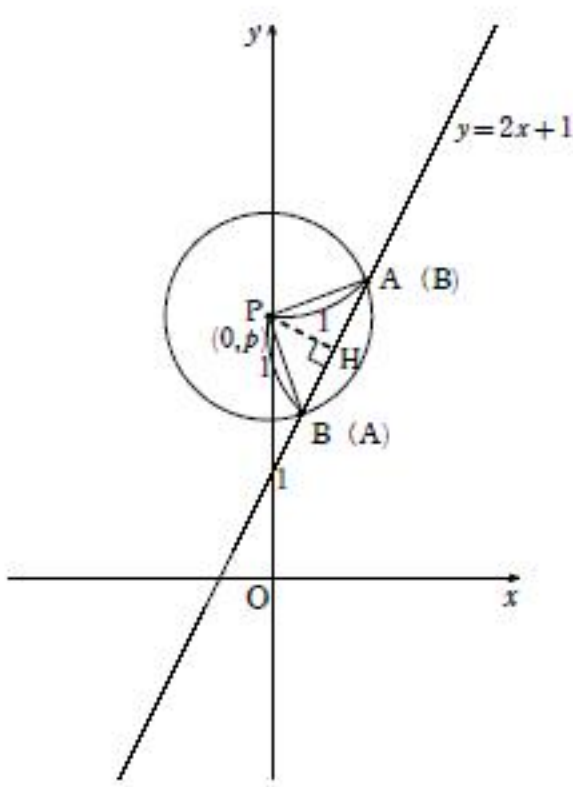
ここで、
$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 f(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 (At+1)dt \\ &= 2\int_0^1 dt \\ &= 2 \\ \therefore (\text{答}) \quad f(x) &= 2x+1 \end{aligned}$$

(2) 円の中心 $P(0, p)$ と直線 $2x-y+1=0$ との距離が 1 未満となればよい. 点 P から直線に下した垂線の足を H とする.

$$PH = \frac{|0 \cdot 2 + p \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|1-p|}{\sqrt{5}}$$

より、
$$\begin{aligned} \frac{|1-p|}{\sqrt{5}} < 1 &\iff |1-p| < \sqrt{5} \\ \iff |1-p| < \sqrt{5} &\iff -\sqrt{5} < p-1 < \sqrt{5} \end{aligned}$$

$\therefore (\text{答}) \quad 1-\sqrt{5} < p < 1+\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$



(3) $PH = \frac{|1-p|}{\sqrt{5}}$, $PB = 1$ より,

$$BH = \sqrt{1 - \frac{(1-p)^2}{5}}, \quad AB = 2BH = 2\sqrt{1 - \frac{(1-p)^2}{5}}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} AB \cdot PH = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - \frac{(1-p)^2}{5}} \cdot \frac{|1-p|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{5} |1-p| \sqrt{4+2p-p^2} \end{aligned}$$

$\therefore S = \frac{1}{5} |1-p| \sqrt{4+2p-p^2}$

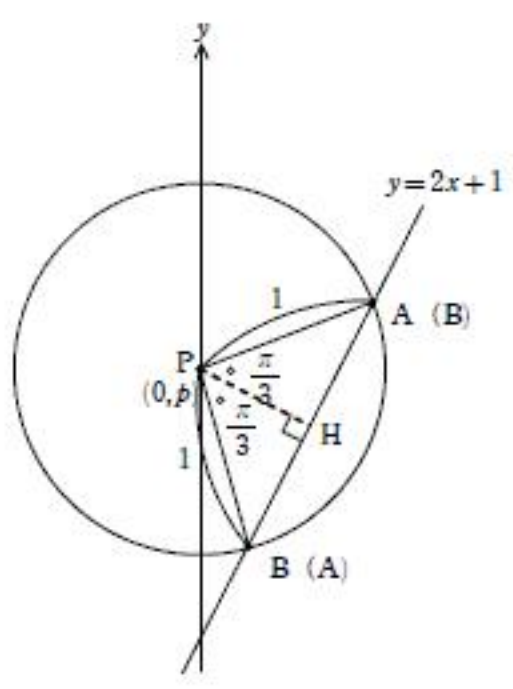
(4) $\angle APB = \frac{2}{3}\pi$ つまり、 $\angle APH = \angle BPH = \frac{\pi}{3}$ より

$PH = \frac{1}{2}$ とわかる.

(2) を利用して、 $PH = \frac{|1-p|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$

$$|1-p| = \frac{\sqrt{5}}{2} \iff p-1 = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$\therefore p = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$



(1) $x = \alpha, \beta$ は 2 次方程式 $x^2 + 2x + 4 = 0$ の解なので $\alpha, \beta = -1 \pm \sqrt{3}i$

$$\text{さらに, } \alpha^2 + 2\alpha + 4 = 0, \beta^2 + 2\beta + 4 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{解と係数の関係より } \begin{cases} \alpha + \beta = -2 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{ここで, } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{(-2)^2 - 2 \cdot 4}{4^2} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{(答)} \quad \underline{\underline{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = -\frac{1}{4} \quad \dots\dots ③}}$$

$$(2) \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{(-1 - \sqrt{3}i)^2}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i) \text{ としてよい.}$$

このとき, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3}i)$ となり, $x = \frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ は共役解とわかる.

$$\text{ここで, } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2} = \frac{4}{\alpha^2} (\because ②), \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\beta}{\beta^2} = \frac{4}{\beta^2} (\because ②) \text{ に注意して,}$$

解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{4}{\alpha^2} + \frac{4}{\beta^2} = 4 \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = -1 \quad \left(= -\frac{a}{2} \right) \\ \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad \left(= -\frac{b}{2} \right) \end{cases}$$

$$\text{よって, } -\frac{a}{2} = -1, -\frac{b}{2} = 1$$

$$\therefore \text{(答)} \quad \underline{\underline{a = 2, b = 2}}$$

$$(3) \quad \alpha^3 - 8 = (\alpha - 2)(\alpha^2 + 2\alpha + 4) = 0 \quad (\because ①)$$

$$\beta^3 - 8 = (\beta - 2)(\beta^2 + 2\beta + 4) = 0 \quad (\because ①)$$

$$\therefore \text{(答)} \quad \underline{\underline{\alpha^3 = 8, \beta^3 = 8}}$$

$$(4) \quad \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ とすると,}$$

$$\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \omega^3 = 1 \quad \text{である.}$$

$\alpha = 2\omega, \beta = 2\omega^2$ としてよい.

(i) $n = 3k$ (k :自然数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2} \right)^n = \omega^{3k} = (\omega^3)^k = 1$$

$$\left(\frac{\beta}{2} \right)^n = (\omega^2)^{3k} = (\omega^3)^{2k} = 1 \quad \text{であるから}$$

$$c(n) = \frac{1}{(i-1)(i-1)} = \frac{1}{(i-1)^2} = \frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$$

(ii) $n = 3k+1$ ($k \geq 0$ の整数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2} \right)^n = \omega^{3k+1} = (\omega^3)^k \cdot \omega = \omega$$

$$\left(\frac{\beta}{2} \right)^n = (\omega^2)^{3k+1} = (\omega^3)^{2k} \cdot \omega = \omega^2 \quad \text{であるから}$$

$$c(n) = \frac{1}{(i-\omega)(i-\omega^2)} = \frac{1}{i^2 - (\omega + \omega^2)i + \omega^3} = \frac{1}{i} = -i$$

(iii) $n = 3k+2$ ($k \geq 0$ の整数) のとき

$$\left(\frac{\alpha}{2} \right)^n = \omega^{3k+2} = (\omega^3)^k \cdot \omega^2 = \omega^2$$

$$\left(\frac{\beta}{2} \right)^n = (\omega^2)^{3k+2} = (\omega^3)^{2k} \cdot \omega^4 = \omega \quad \text{であるから (ii) と同様に}$$

$$c(n) = -i$$

$$(i)(ii)(iii) \text{ より} \quad \text{(答)} \quad c(n) = \begin{cases} \frac{i}{2} & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき}) \\ -i & (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}) \end{cases}$$