

[1]

(1) 2点 A, B を通る円(円 C とする)の中心は、線分 AB の垂直二等分線上にある。つまり、
 $y = -3x + 6$

上にあるから、円 C の中心 P の座標は

$$(t, -3t + 6)$$

と表せる。点 P と直線 $y = \frac{1}{2}x$ (直線 l とする) の距離を h とすると、

$$\begin{aligned} h &= \frac{|t - 2(-3t + 6)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{|7t - 12|}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

である。円 C と直線 l が共有点を持つための条件は、

$$h^2 \leq AP^2$$

を満たすことで、

$$\frac{(7t - 12)^2}{5} \leq \{t - (-1)\}^2 + \{(-3t + 6) - 4\}^2$$

$$\Leftrightarrow t \leq -119, \quad 1 \leq t \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって、P の軌跡は、

$$\text{直線 } y = -3x + 6 \quad (x \leq -119, \quad 1 \leq x) \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad r^2 = AP^2 = 10 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}$$

であるから①の範囲とで、 r^2 は $t = 1$ で最小値 5 をとる。

$$r \text{ の最小値は } \sqrt{5} \quad \cdots \text{答}$$

[Ⅲ]

(1) $y_1 \geq 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$y_2 < 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{答}$$

(2) $y_1 \geq 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y_2 \geq 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$y_3 \geq 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$y_4 < 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{答}$$

(3) $x_1 > 0, y_1 > 0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$y_2 = x_1 \geq 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

$y_3 = -y_1 < 0$ なので、

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{答}$$

(4) (3)の結果より、 $x_1 > 0, y_1 > 0$ としたとき、この変換により次のようなループになることが分かるから、第1象限、第2象限、第3象限の点からスタートすると必ずスタートとなる点に戻ってくる。よって考察するのは軸上の点、そして第4象限の点で十分である。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

さて、 $x_1 = y_1 = 0$ (原点) とすると $x_2 = y_2 = 0$ となるので、以下 $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$ として考える。

$x_1 > 0, y_1 = 0$ のときを考えると次のようなループになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

つまり、 x 軸上の点で $x > 0$ の点からスタートすると、この点に戻ってこない。

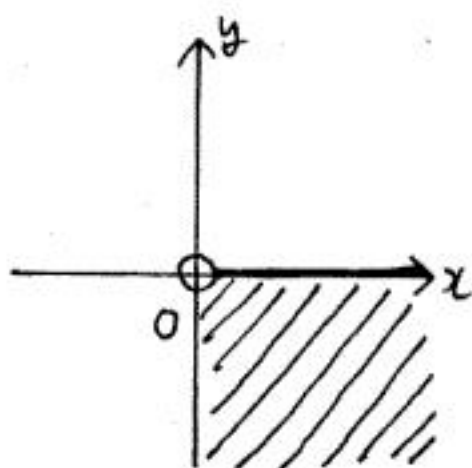
それ以外の軸上の点(原点は除く)からスタートすると、数回の変換の後、スタートの点に戻ってくる。

最後に $x_1 > 0, y_1 < 0$ のときを考えると次のようなループになる。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

よって、第4象限からスタートした場合、何度変換を施してもスタートの点に戻らない。

以上より求める領域は図の斜線部分(境界は x 軸の $x > 0$ の部分のみ含む)となる。



【Ⅲ】

(1) $f(x)=e^{|x|}$, $g(x)=ax+b$ とおく。

$x \geq 0$ の範囲を考えると、

$$f(x)=e^x$$

$$f'(x)=e^x, \quad f'(0)=1$$

$f'(x)=a$ を考えると、

$$a < 1 \text{ では解なし} \quad a \geq 1 \text{ では } x = \log a \ (\geq 0)$$

よって $a > 1$ のとき $y = f(x)$ 上の点 $(\log a, a)$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= a(x - \log a) + a \\ &= ax + a - a \log a \end{aligned}$$

となる。

以上と $y = f(x)$ は偶関数であること、そしてグラフの概形をあわせることで、

$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点数は

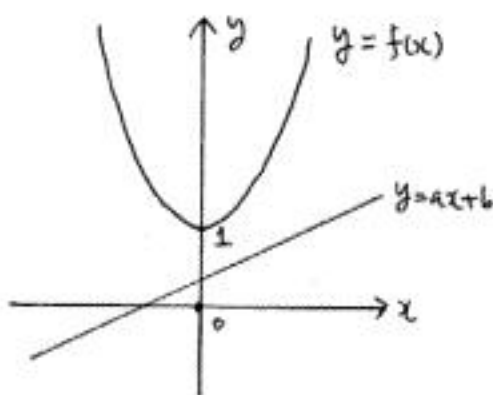
$|a| \leq 1$ のとき、 $b < 1$ なら 0 個、 $b = 1$ なら 1 個、 $b > 1$ なら 2 個

$|a| \geq 1$ のとき、 $b < |a| - |a| \log |a|$ なら 0 個、 $b = |a| - |a| \log |a|$ なら 1 個、 $b > |a| - |a| \log |a|$ なら 2 個

つまりただ 1 つの共有点をもつための条件は、

$$\left. \begin{aligned} &|a| \leq 1 \text{ のとき、} b = 1 \\ &|a| \geq 1 \text{ のとき、} b = |a| - |a| \log |a| \end{aligned} \right\} \dots \text{答}$$

グラフは右図。



(2)

$|a| \leq 1$ のとき、 $pa + f(a) = pa + 1$ であり、この区間では

$p > 0$ のとき、 $a = 1$ で最大値 $p + 1$

$p = 0$ のとき、 $-1 \leq a \leq 1$ で最大値 1

$p < 0$ のとき、 $a = -1$ で最大値 $-p + 1$ を取る。

$|a| \geq 1$ のとき、 $pa + f(a) = pa + |a| - |a| \log |a|$ であり、

$a \geq 1$ では、 $h(a) = pa + a - a \log a$ として $h'(a) = p - \log a$

よって増減は下のようになり、

$p \geq 0$ のとき

$p \leq 0$ のとき

a	1	...	e^p	...
$h'(a)$		+	0	-
$h(a)$	$p+1$	↗	e^p	↘

a	1	...
$h'(a)$		-
$h(a)$	$p+1$	↘

$p \geq 0$ では最大値 $h(e^p) = e^p$, $p \leq 0$ では最大値 $h(1) = p + 1$ である。

$a \leq -1$ では $k(a) = pa - a + a \log(-a)$ として $k'(a) = p + \log(-a)$

よって増減は下のようになり、

$p \geq 0$ のとき

$p \leq 0$ のとき

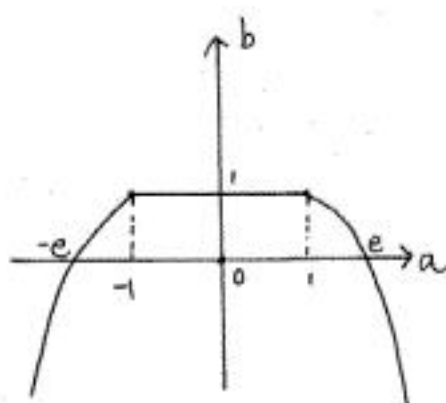
a	...	-1
$k'(a)$	+	
$k(a)$	↗	$-p+1$

a	...	$-e^{-p}$	...	-1
$k'(a)$	+	0	-	
$k(a)$	↗	e^{-p}	↘	$-p+1$

$p \geq 0$ では最大値 $h(-1) = -p + 1$, $p \leq 0$ では最大値 $h(-e^{-p}) = e^{-p}$ である。

以上と、 $q \geq 0$ のとき $-q + 1 \leq q + 1 \leq e^q$ であることから、 $pa + f(a)$ は

$$\left. \begin{aligned} &p > 0 \text{ のとき、} a = e^p \text{ で最大値 } e^p \\ &p = 0 \text{ のとき、} -1 \leq a \leq 1 \text{ で最大値 } 1 \\ &p < 0 \text{ のとき、} a = -e^{-p} \text{ で最大値 } e^{-p} \end{aligned} \right\} \dots \text{答}$$



[IV]

(1) 線分 PQ 上の点 R について、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + k\overrightarrow{PQ} \\ &= (1-2k, k, 1-k)\end{aligned}$$

と書ける。 $1-2k=t$ とおくことで、線分 PQ と平面 $x=t$ の交点の座標 T は、

$$T\left(t, \frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right)$$

よって曲面 S の平面 $x=t$ による切り口の面積は、

$$\pi\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right\} = \frac{1+t^2}{2}\pi$$

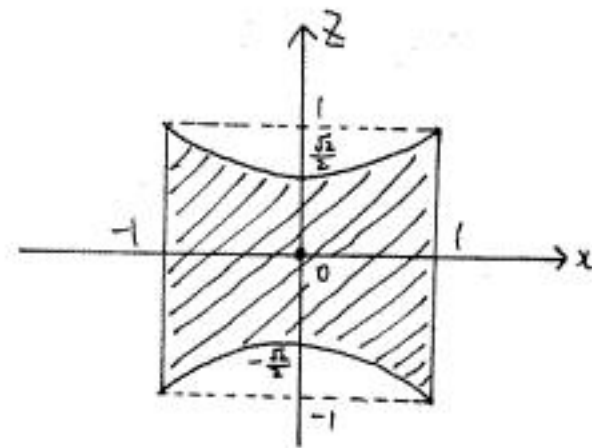
よって求める体積は、

$$\int_{-1}^1 \frac{1+t^2}{2}\pi dt = \frac{\pi}{2}\left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}\pi \quad \cdots \text{答}$$

(2) 問いの切り口と平面 $x=t$ との共通部分は、 $U(t, 0, 0)$ としたとき、線分 UT を点 U 中心に x 軸周りに回転させて、線分 UT 全体が xz 平面上に含まれるようにしたもの一致する。

$$UT = \sqrt{\frac{1+t^2}{2}}$$

であるから、 xz 平面上で $z = \pm\sqrt{\frac{1+x^2}{2}}$ 、 $x = \pm 1$ で囲まれた図形となる。



(3) $t = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ のとき、

$$t^2 + 1 = \left(\frac{e^s - e^{-s}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{e^s + e^{-s}}{2}\right)^2$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \quad \begin{cases} t: 0 \rightarrow 1 \\ s: 0 \rightarrow \alpha \end{cases} \quad (\alpha = \log(1+\sqrt{2}))$$

から、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt &= \int_0^\alpha \frac{e^s + e^{-s}}{2} \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2} ds \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} e^{2s} + 2s - \frac{1}{2} e^{-2s} \right]_0^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) \} \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$

(2) の切り口の面積は、

$$\begin{aligned}4 \int_0^1 \sqrt{\frac{t^2 + 1}{2}} dt &= \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \{ \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}) \} \\ &= 2 + \sqrt{2} \log(1+\sqrt{2}) \quad \cdots \text{答}\end{aligned}$$

[V]

(1) $2n$ 回中に表が k 回出る確率を $p_{2n,k}$ ($0 \leq k \leq 2n$) とすると、

$$p_{2n,k} = {}_{2n}C_k p^k (1-p)^{2n-k}$$

と表せる。

$$\begin{aligned} P_2 &= p_{4,3} + p_{4,4} \\ &= {}_4C_3 p^3 (1-p)^1 + {}_4C_4 p^4 \\ &= p^3 (4-3p) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= p_{6,4} + p_{6,5} + p_{6,6} \\ &= {}_6C_4 p^4 (1-p)^2 + {}_6C_5 p^5 (1-p)^1 + {}_6C_6 p^6 \\ &= p^4 (15-24p+10p^2) \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(2) $P_3 > P_2$

$$\Leftrightarrow (p-1)^2 (5p-2) > 0$$

$$0 < p < 1 \text{ から、 } \frac{2}{5} < p < 1 \quad \cdots \text{答}$$

(3) 硬貨を $2n+2$ 回投げて表が $n+2$ 回以上出るという事象は、次の 3 つの排反な事象に分けられる：

- (i) $1 \sim 2n$ 回で表が n 回、 $2n+1, 2n+2$ 回目で表が 2 回出る
- (ii) $1 \sim 2n$ 回で表が $n+1$ 回、 $2n+1, 2n+2$ 回目で表が 1 回以上出る
- (iii) $1 \sim 2n$ 回で表が $n+2$ 回以上 ($2n+1, 2n+2$ 回目は表でも裏でもよい)

(i) の確率は

$${}_{2n}C_n p^n (1-p)^n \cdot p^2 = {}_{2n}C_n p^{n+2} (1-p)^n \quad \cdots \cdots \text{①}$$

(ii) について、最後の 2 回は「2 回とも裏である」ことの余事象であると考え、確率は

$${}_{2n}C_{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} \cdot \{1 - (1-p)^2\} = {}_{2n}C_{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} - {}_{2n}C_{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n+1} \quad \cdots \cdots \text{②}$$

(iii) は $1 \sim 2n$ 回目で「表が $n+1$ 回以上」から「表が $n+1$ 回」を除くと考え、その確率は

$$P_n - {}_{2n}C_{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} \quad \cdots \cdots \text{③}$$

よって、①+②+③より

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= {}_{2n}C_n p^{n+2} (1-p)^n - {}_{2n}C_{n+1} p^{n+1} (1-p)^{n-1} + P_n \\ \therefore P_{n+1} - P_n &= p^{n+1} (1-p)^n \{ {}_{2n}C_n p - {}_{2n}C_{n+1} (1-p) \} \\ &= p^{n+1} (1-p)^n \{ ({}_{2n}C_n + {}_{2n}C_{n+1}) p - {}_{2n}C_{n+1} \} \end{aligned}$$

となり、 ${}_{2n}C_{n+1} = {}_{2n}C_{n-1}$ であるから、

$$a = {}_{2n}C_n + {}_{2n}C_{n-1} (= {}_{2n+1}C_n), \quad b = -{}_{2n}C_{n-1} \quad \cdots \cdots \text{答}$$

(3) 【別解】

$$\begin{aligned} P_n &= p_{2n,n+1} + p_{2n,n+2} + \cdots + p_{2n,2n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} {}_{2n}C_k p^k (1-p)^{2n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}C_k p^{2n-k} (1-p)^k \end{aligned}$$

と表せる。問題文について拡張して $p=0, 1$ の場合を考えると、それぞれ $P_n=0, 1$ となるから、上式は $p=0, 1$ の場合も成り立つことに注意する。このとき、

$$P_{n+1} - P_n = \sum_{k=0}^n {}_{2n+2}C_k p^{2n+2-k} (1-p)^k - \sum_{k=0}^{n-1} {}_{2n}C_k p^{2n-k} (1-p)^k \quad \cdots \text{①}$$

ここで $P_{n+1} - P_n = p^{n+1} (1-p)^n (ap+b)$ と書けると、①の両辺は p^{n+1} を因数にもつので p^{n+1} で割ってから $p=0$ を代入することで、

$$b = -{}_{2n}C_{n-1}$$

また $p_{2n,0} + p_{2n,1} + \cdots + p_{2n,2n} = 1$ であるから、

$$P_n = 1 - \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_k p^k (1-p)^{2n-k}$$

と表せ、

$$P_{n+1} - P_n = \sum_{k=0}^n {}_{2n}C_k p^k (1-p)^{2n-k} - \sum_{k=0}^{n+1} {}_{2n+2}C_k p^k (1-p)^{2n+2-k} \quad \cdots \text{②}$$

②の両辺は $(1-p)^n$ を因数にもつので $(1-p)^n$ で割ってから $p=1$ を代入することで、

$$a+b = {}_{2n}C_n$$

以上より、

$$a = {}_{2n}C_n + {}_{2n}C_{n-1}, \quad b = -{}_{2n}C_{n-1} \quad \cdots \text{答}$$

$$(4) \quad P_{n+1} - P_n = p^{n+1} (1-p)^n \{ ({}_{2n}C_n + {}_{2n}C_{n-1}) p - {}_{2n}C_{n-1} \}$$

から、

$$P_{n+1} - P_n > 0$$

$$\Leftrightarrow p > \frac{{}_{2n}C_{n-1}}{{}_{2n}C_n + {}_{2n}C_{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \frac{\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!} + \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}} \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

だから $p = \frac{7}{16}$ のとき、

$$\frac{7}{16} > \frac{n}{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{7}{2}$$

よって $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > P_6 > \cdots$

となるから P_n を最大にする n は $n=4$ $\cdots$ 答