

数 学

(問 題)

2010年度

〈2010 H22043620〉

注 意 事 項

1. 問題冊子は，試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～7ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁およびマーク解答用紙の汚れ等に気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルでマークすること。
4. 氏名は，試験開始後，マーク解答用紙の所定欄に，正しくていねいに記入すること。
5. 問1から問4までの **ア**， **イ**， **ウ**， …にはそれぞれ，-49， -48， …， -2， -1， 0， 1， 2， …， 48， 49のいずれかが当てはまる。次の例にならって，マーク解答用紙の**ア**， **イ**， **ウ**， …で示された欄にマークして答えること。
例. **ア**に3， **イ**に-5， **ウ**に30， **エ**に-24， **オ**に0と答えたいとき。

	—	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. マーク欄ははっきり記入すること。また，訂正する場合は，消しゴムでていねいに，消し残しがないようによく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い

7. いかなる場合でも，マーク解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ること。

問 1.

- (1) 平面上の 4 点 $O(0, 0)$, $A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(1, 1)$ に対し, 線分 BC の垂直二等分線は $\boxed{\text{ア}}x + y + \boxed{\text{イ}} = 0$ となる. また, 平面上で $PC \leq PO$, $PC \leq PA$, $PC \leq PB$ を満たす点 P の存在する範囲は 3 点 $(0, 1)$, $(2, \boxed{\text{ウ}})$, $(\boxed{\text{エ}}, \boxed{\text{オ}})$ を頂点とする三角形の内部および周であり, この三角形の面積は $\boxed{\text{カ}}$ である.

- (2) 平面上に 3 点 O , A , B があり, 点 O を定点として, 2 点 A , B は次の条件を満たしながら動く.

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$|\vec{OA} + \vec{OB}|^2 + |\vec{OA} - \vec{OB}|^2 = 8$$

さらに, 点 C を $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ となるようにとるとき, $|\vec{OC}|$ の最大値は $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である.

問2.

(1) 自然数 n が $n = p^2q$ (p, q は素数, $p \neq q$) の形で表されるとき, n の正の約数は6個あり, それらの和は

$$(\boxed{\text{ク}} + p + p^2)(\boxed{\text{ケ}} + q)$$

と表すことができる. このような n で正の約数の和が $2n$ となるような数を求める. 正の約数の和が $2n$ であるから,

$$2p^2q = (\boxed{\text{ク}} + p + p^2)(\boxed{\text{ケ}} + q)$$

が成り立つ. $\boxed{\text{ク}} + p + p^2$ は奇数であり, p の倍数ではないから, $\boxed{\text{ケ}} + q$ は $2p^2$ の倍数となり,

$$\boxed{\text{ケ}} + q = 2p^2k \quad (k \text{ は自然数})$$

とおける. したがって,

$$q = (\boxed{\text{ク}} + p + p^2)k$$

となるが, q は素数であるから, $k = \boxed{\text{コ}}$ である. よって

$$p^2 - p - \boxed{\text{サ}} = 0$$

これを解いて, $p = \boxed{\text{シ}}$ である. ゆえに $n = \boxed{\text{ス}}$ である.

(2) 条件

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して, $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ とおくと, 数列 $\{b_n\}$ は等比数列となり, これより,

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ の一般項は } a_n = \frac{\boxed{\text{セ}} \cdot \boxed{\text{ソ}}^n + \boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}^n - \boxed{\text{ツ}}} \text{ となる.}$$

問 3.

1 辺の長さが 1 (メートル) の正三角形の紙がある. この三角形の 3 頂点を A, B, C とする. 辺 BC 上の点 P と辺 AB 上の点 Q を次のようにとる.

点 Q を通るある直線を折り目としてこの紙を折り曲げるときに点 A は点 P に重なる.

ここで, $BP = x$ (メートル), $PQ = y$ (メートル) とおくと,

$$x^2 - (\boxed{\text{テ}} - y)x + \boxed{\text{ト}} - \boxed{\text{ナ}}y = 0$$

が成り立つ. これを x についての方程式とみると, $0 \leq x \leq 1$ であるから

$$\boxed{\text{ニ}} + \boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}} \leq y \leq 1$$

となる. したがって, AQ が最小となるのは, $y = \boxed{\text{ニ}} + \boxed{\text{ヌ}}\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}$ のときであり, このとき, $\angle BAP = \boxed{\text{ノ}}^\circ$ である.

ただし, $\boxed{\text{ネ}}$ はできる限り小さい自然数で答えること.

問 4.

$-1 \leq a \leq 1$ の範囲の実数 a に対して

$$f(a) = \int_{-1}^1 x|x-a|dx$$

とおく. k を実数とし, 区間 $-1 \leq x \leq 1$ を定義域とする関数

$$g(x) = 12f(x) + kx$$

を考える.

(a) $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で

$$12f(x) = \boxed{\text{ハ}} x^3 - \boxed{\text{ヒ}} x$$

が成り立つ.

(b) 関数 $g(x)$ が $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ で最小値をとるとき, $k = \boxed{\text{フ}}$ である.

(c) 関数 $g(x)$ が最小値をとるような x の値が 2 つあるとき, $k = \boxed{\text{ヘ}}$ である. このときの $g(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ホ}}$ である.

[以 下 余 白]

