

数 学 問 題

2010年度

〈 H22040017 〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定欄（各2か所）に受験番号および氏名を記入してください。
5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入してください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] xy 平面上の 2 点 $A(-1, 4)$, $B(2, 5)$ を通り、直線 $y = \frac{1}{2}x$ と共有点をもつ円を考える。以下の問に答えよ。

- (1) この円の中心 P の軌跡を求めよ。
- (2) この円の半径 r の最小値を求めよ。

[II] xy 平面上の点 (x_1, y_1) に対して、点 (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , $\dots$ を次の式で順に定める。

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} & (y_n \geq 0 \text{ のとき}) \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} & (y_n < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

以下の問に答えよ。

- (1) $(x_1, y_1) = (-1, 2)$ のとき、 (x_3, y_3) を求めよ。
- (2) $(x_1, y_1) = (1, 0)$ のとき、 (x_5, y_5) を求めよ。
- (3) $x_1 > 0$ かつ $y_1 > 0$ のとき、 $(x_4, y_4) = (x_1, y_1)$ となることを示せ。
- (4) $(x_n, y_n) = (x_1, y_1)$ となる 2 以上の整数 n が存在しないとき、点 (x_1, y_1) はどのような範囲にあるかを図示せよ。

[III] a, b を実数とし、 xy 平面上の次の 2 つの関数のグラフについて考える。

$$y = e^{|x|} \quad \dots\dots \text{①}$$

$$y = ax + b \quad \dots\dots \text{②}$$

以下の問に答えよ。

- (1) ①, ② がただ 1 つの共有点をもつとき、 b を a で表し、そのグラフを ab 平面上に図示せよ。
- (2) (1) のグラフを $b = f(a)$ と表す。定数 p に対して

$$pa + f(a)$$

を最大にする a およびその最大値を求めよ。

[IV] xyz 空間において, 2 点 $P(1, 0, 1)$, $Q(-1, 1, 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる曲面を S とする。以下の問に答えよ。

- (1) 曲面 S と, 2 つの平面 $x = 1$ および $x = -1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。
- (2) (1) の立体の平面 $y = 0$ による切り口を, 平面 $y = 0$ 上において図示せよ。
- (3) 定積分 $\int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} dt$ の値を $t = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。
これを用いて, (2) の切り口の面積を求めよ。

[V] 表の出る確率が p ($0 < p < 1$), 裏の出る確率が $1 - p$ の硬貨が 1 枚ある。 n を自然数とする。この硬貨を $2n$ 回投げたとき, 表が $n + 1$ 回以上出る確率を P_n とする。以下の問に答えよ。

- (1) P_2, P_3 を求めよ。
- (2) $P_3 > P_2$ となる p の範囲を求めよ。
- (3) $P_{n+1} - P_n = p^{n+1}(1 - p)^n(ap + b)$ となる a, b を n を用いて表せ。ただし a, b は p を含まないとする。
- (4) $p = \frac{7}{16}$ のとき, P_n を最大にする n を求めよ。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。