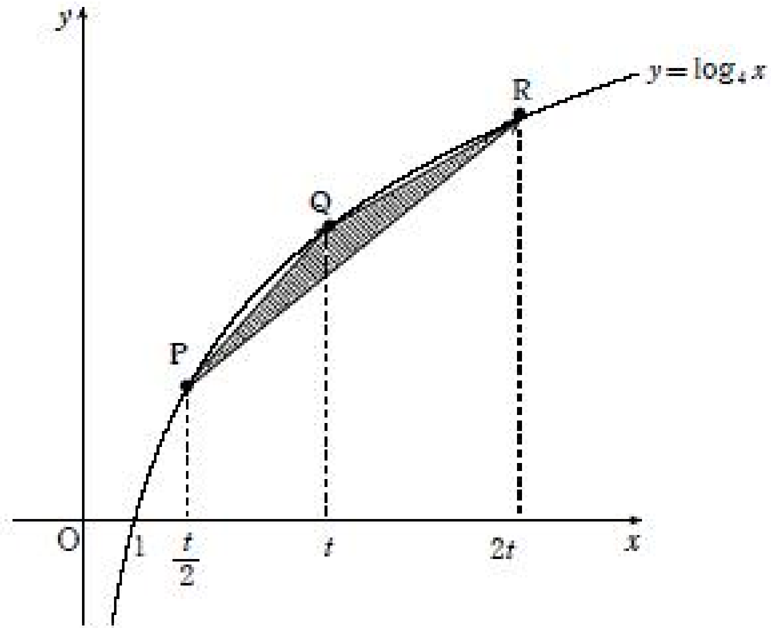
問 1

$t>0$ より $\dfrac{t}{2}<t<2t$ と考えてよい．

$$\mathrm{P}\left(\frac{t}{2},\ \log_4\frac{t}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(t,\ \log_4 t\right),\ \mathrm{R}\left(2t,\ \log_4 2t\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\dfrac{3}{2}t,\ 1\right)$ より，

$$\underline{\left|\overrightarrow{\mathrm{PR}}\right|=\sqrt{\frac{9}{4}t^2+1}}\quad \boxed{ア}\qquad\cdots\cdots(答)$$



次に，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ なので，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}t\cdot\frac{1}{2}-\frac{t}{2}\cdot 1\right|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{4}\quad(t>0)$$

$$=\underline{\frac{t}{8}}\quad\boxed{イ}\qquad\cdots\cdots(答)$$

問2

(1)

問①

$$\alpha+\beta=\frac{p_2q_1+p_1q_2}{p_1p_2}=m$$ （m：整数）とおく．

$p_2q_1+p_1q_2=mp_1p_2$ ……③

$\iff p_2q_1=p_1(mp_2-q_2)$

ここで，p_1 と q_1 は互いに素な整数より，

$p_2=kp_1$ ……④ （k：自然数）と表せる．

これを③へ代入すると，

$kp_1q_1+p_1q_2=mkp_1^{\ 2}$

$\iff kq_1+q_2=mkp_1$

$\iff q_2=k(mp_1-q_1)$

ここで，k を $k\geqq 2$ をみたす自然数とすれば，$\beta=\dfrac{q_2}{p_2}=\dfrac{k(mp_1-q_1)}{kp_1}$ となり矛盾．

つまり，$k=1$ とわかる．

以上より，④へ代入して $p_1=p_2$ は示された．　（証明終）

問②

問①の結果を用いて p_2 を p_1 で表せば

$$\alpha\beta=\frac{q_1q_2}{p_1p_2}=\frac{q_1q_2}{p_1^{\ 2}}=l$$ （l：整数）とおける．

つまり，$q_1\times q_2=lp_1^{\ 2}$ だから，q_1 または q_2 は，p_1 を少なくとも1つは因数にもつとわかる．

ところが，$\alpha=\dfrac{q_1}{p_1}$, $\beta=\dfrac{q_2}{p_2}=\dfrac{q_2}{p_1}$ より，既約分数であることに矛盾する．

（証明終）

以上の問①と問②の記述より，$x^2+ax+b=0$ の異なる2実解 $x=\alpha,\beta$ はともに整数解，または，ともに無理数解が示された．

(2)

(1)の結果を用いて考える．$a=0$, $b=-c$ （c は自然数）とおく．

つまり，(A)は $x^2-c=0$ となり $D=4c>0$ より，

異なる2実解 $x=\alpha,\beta$ をもつ．ちなみに $\alpha=\sqrt{c}$, $\beta=-\sqrt{c}$ としてもよい．

(1)の結果より，α,β はともに整数，または，ともに無理数より，

$\sqrt{c}$ は自然数または無理数となる．　（証明終）

問3

(1) コイン $\begin{cases}(\text{表})\cdots\cdots p\\ (\text{裏})\cdots\cdots 1-p\end{cases}$ ⟵ 1日に4回投げる試行を T とする．

独立試行の確率を用いて，

$$A=\underset{\substack{(\text{表})\cdots 2\text{回}\\(\text{裏})\cdots 2\text{回}}}{\underline{\underline{{}_4\mathrm{C}_2p^2(1-p)^2}}}+\underset{\substack{(\text{表})\cdots 3\text{回}\\(\text{裏})\cdots 1\text{回}}}{\underline{\underline{{}_4\mathrm{C}_3p^3(1-p)^1}}}+\underset{(\text{表})\cdots 4\text{回}}{\underline{\underline{{}_4\mathrm{C}_4p^4}}}$$

$$=6(p^4-2p^3+p^2)+4p^3-4p^4+p^4$$

$$=\underline{3p^4-8p^3+6p^2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

(i) 試行 T において，

$$\begin{cases}2\text{回以上表が出る} & \cdots\cdots\text{確率 }A\\ 0\text{ 回または 1 回表が出る} & \cdots\cdots\text{確率 }1-A(=\overline{A}\text{と示すことにする})\end{cases}$$

・ $\underline{A\,A\,A}\,\overline{A}\,\overline{A}$, $\overline{A}\,\underline{A\,A\,A}\,\overline{A}$, $\overline{A}\,\overline{A}\,\underline{A\,A\,A}$ ⟵ (3日連続)

・ $\underline{A\,A}\,\overline{A}\,A\,\overline{A}$ の2通り, $\overline{A}\,\underline{A\,A}\,\overline{A}\,A$ の1通り, $A\,\overline{A}\,\underline{A\,A}\,\overline{A}$ の1通り,

・ $A\,\overline{A}\,\overline{A}\,\underline{A\,A}$ の2通り ⟵ (2日連続)

全部で9通りある．求める確率は

$$\underline{9A^3(1-A)^2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(ii)

(2日連続)+(3日連続)+(4日連続)+(5日連続)

=1−{(1日に2回以上表が出る日はなし)+(連続としては1日, 2回以上表が出る)}

$$=1-\left\{(1-A)^5+\underset{A\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}\,\overline{A}}{\underline{5A(1-A)^4}}+\underset{A\,\overline{A\,A}\,A\,\overline{A}}{\underline{{}_4\mathrm{C}_2A^2(1-A)^3}}+\underset{A\,\overline{A}\,A\,\overline{A}\,A}{\underline{A^3(1-A)^2}}\right\}$$

$$=\underline{A^5-A^4-3A^3+4A^2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

問 4

(1) $2PO^2+PA^2=3l^2$ ……(＊)

$\iff 2(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+y^2\}=3l^2$

$\iff 3x^2-2ax+3y^2+a^2=3l^2$

$\iff \left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+y^2=l^2-\dfrac{2}{9}a^2$ ……①

$\{$ p の集合が空集合ではない $\}$ $\iff$ $\{$ ①をみたす実数 (x, y) が存在する $\}$

$l^2-\dfrac{2}{9}a^2\geqq 0$

$\iff a^2\leqq\dfrac{9}{2}l^2$

$\therefore\ \underbrace{0<a\leqq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l,\ \left(x-\dfrac{a}{3}\right)^2+y^2=l^2-\dfrac{2}{9}a^2}_{(p\text{ の軌跡の方程式})}$ ……(答)

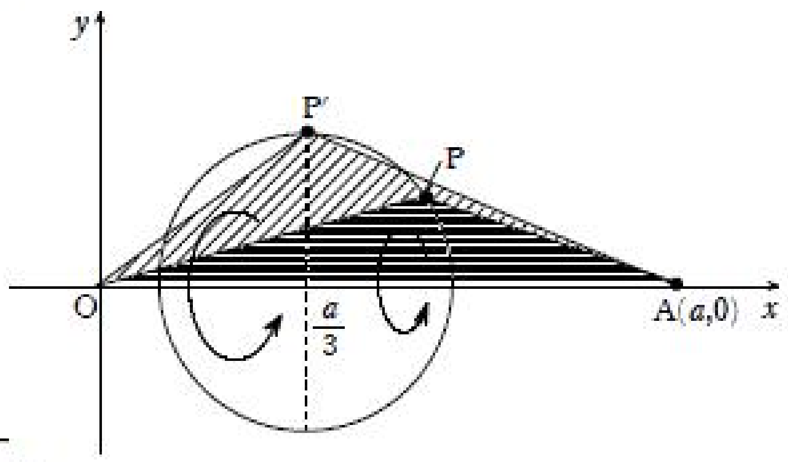
(2) ①より, 点 P (x, y) は $0<a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l$ において

中心 $\left(\dfrac{a}{3}, 0\right)$, 半径 $\sqrt{l^2-\dfrac{2}{9}a^2}$ の円

$a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l$ のとき,

点 P (x, y) は点 $\left(\dfrac{a}{3}, 0\right)$ となり不適.

ここで, 条件より 3 点 O, A, P 同一直線上にないから, 中心 $\left(\dfrac{a}{3}, 0\right)$, 半径 $\sqrt{l^2-\dfrac{2}{9}a^2}$ の円 (ただし, 点 P が x 軸上にある場合を除く) の $0<a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l$ で考えてよい.



図の通り点 P′ をとると

(△OAP の回転体の体積) $\leqq$ $\underbrace{(\triangle OAP' \text{ の回転体の体積})}_{\text{(最大の体積)}}$ ← 図形の対称性より P (x, y) の $y>0$ で調べる

$\underline{(\text{点 P}' \text{ の } x \text{ 座標})=\dfrac{a}{3}}$ ……(答)

$\therefore\ V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\sqrt{l^2-\dfrac{2}{9}a^2}\right)^2\cdot a$

$=\dfrac{\pi}{3}\left(l^2a-\dfrac{2}{9}a^3\right)$

$=\underline{\dfrac{\pi}{27}(9l^2a-2a^3)\quad\left(0<a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l\right)}$ ……(答)

(3) $V=V(a)$ とおくと,

$V'(a)=\dfrac{\pi}{27}(9l^2-6a^2)$

$=\dfrac{2}{9}\pi\left(\dfrac{3}{2}l^2-a^2\right)$

増減表を描くと右図の通り.

a	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{6}}{2}l$	$\cdots$	$\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}l\right)$
$V'(a)$		$+$	0	$-$	
$V(a)$		↗	(最大)	↘	

増減表より $\underline{a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}l}$ ……(答) のとき V は最大となり,

$(\text{最大値})=V\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}l\right)=\dfrac{\pi}{27}\left(9l^2\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{2}l-2\cdot\dfrac{6\sqrt{6}}{8}l^3\right)$

$=\dfrac{\pi}{27}\left(\dfrac{9\sqrt{6}}{2}-\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)l^3$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{6}}{9}\pi l^3}$ ……(答)