問 1

(1)

①より,

$$b^2+(2-a)b-5(a+3)=0$$

$$\iff (b-a-3)(\underset{\vee\atop 0}{\underline{\underline{b+5}}})=0$$

ここで, $b>0$ より, $\therefore\ b-a=3$ (答) ……③

(2)

②の辺々を $(ab)^a>0$ で割って,

$$\frac{a^ab^b}{(ab)^a}-\frac{a^bb^a}{(ab)^a}-999=0$$

$$\iff b^{b-a}-a^{b-a}=999$$

$$\iff b^3-a^3=999$$

$b-a=3$ だから

$$\iff (\underset{\|\atop 3}{\underline{\underline{b-a}}})(b^2+ab+a^2)=999$$

$$\iff b^2+ab+a^2=333$$

$$\iff (b-a)^2+3ab=333$$

$\therefore\ ab=108$ $\left(b\times(-a)=-108\right)$ ……④

③, ④より, $x=b,\ -a$ を2解にもつ x の2次方程式は,

$$x^2-3x-108=0$$

$$\iff (x-12)(x+9)=0$$

$b>0$ より, $b=12,\ -a=-9$ $\therefore\ a=9,\ b=12$ (答)

(3)

$$\log_{10}a^{50}=\log_{10}9^{50}=\log_{10}3^{100}=100\times0.4771=47.71$$

ここで,

$$47\leqq\log_{10}a^{50}<48$$

$$\iff \log_{10}10^{47}\leqq\log_{10}a^{50}<\log_{10}10^{48}$$

$$\iff 10^{47}\leqq a^{50}<10^{48}$$

$\therefore\ a^{50}$ は48桁の整数. (答)

(4)

$$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-0.3010=\underline{\underline{0.6990}}$$

$$\log_{10}6=\log_{10}(2\times3)=0.3010+0.4771=\underline{\underline{0.7781}}$$

この間に 0.71 は存在

これより,

$$\underset{(47.6990)}{\underline{\underline{47+\log_{10}5}}}<\underset{(47.71)}{\underline{\underline{\log_{10}a^{50}}}}<\underset{(47.7781)}{\underline{\underline{47+\log_{10}6}}}$$

$$\iff \log_{10}(5\times10^{47})<\log_{10}a^{50}<\log_{10}(6\times10^{47})$$

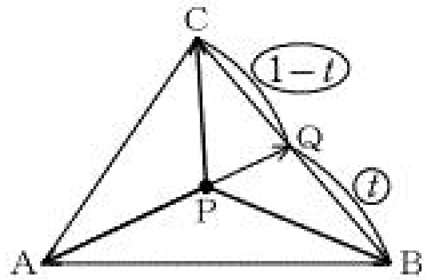
$$\therefore 5\times10^{47}<a^{50}<6\times10^{47}$$

これより, $a^{50}(=9^{50})$ の最高位の数字は5である (答)

問２

(1)(i)

$$a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}+c\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}\quad(a>0,\ b>0,\ c>0)$$



$$\Longleftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}}=-\frac{a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{c}$$

と表せる．

ところで，BQ : QC $= t : 1-t$ だから

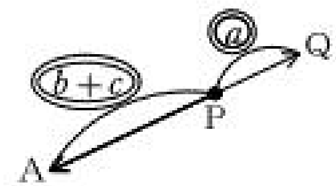
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PB}}+t\overrightarrow{\mathrm{PC}}$$

$$=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{PB}}-\frac{t}{c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{PA}}+b\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)=\underline{-\frac{a}{c}t\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\left(1-t-\frac{b}{c}t\right)\overrightarrow{\mathrm{PB}}}\quad\text{（答）}$$

(ii)

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{PA}}$と表せるから，(i)の結果を用いて

$$1-t-\frac{b}{c}t=0\ \Longleftrightarrow\ t=\frac{c}{b+c}$$



これより，

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=t:1-t=\frac{c}{b+c}:1-\frac{c}{b+c}=\underline{c:b}\quad\text{（答）}$$

(iii)

このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=-\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$=-\frac{a}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{PA}}$$

$$\underline{\therefore\ \mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=b+c:a}\quad\text{（答）}$$

(2)

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}$$

$$=\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{a}{a+b+c}:\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{b}{b+c}\times\frac{b+c}{a+b+c}:\triangle\mathrm{ABC}\times\frac{c}{b+c}\times\frac{b+c}{a+b+c}$$

$$=\underline{a:b:c}\quad\text{（答）}$$

問３

(1)　$S_1 = X_1^2$ より,

$$p_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ q_1 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$　（答）

サイコロの目	1	2	3	4	5	6
(サイコロの目)^2	1	4	9	16	25	36
3で割った余り	1	1	0	1	1	0

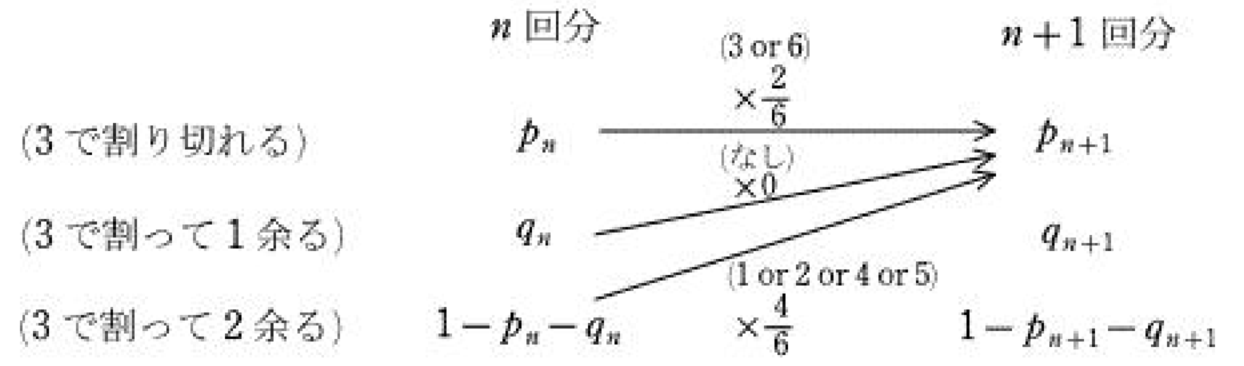
(2)　$S_1 = X_1^2 + X_2^2$ より, 3 で割り切れるのは 1 回目も 2 回目も 3 で割り切れる場合である.

$$p_2 = \frac{2\times 2}{6\times 6} = \frac{1}{9}$$　（答）

3 で割って余りが 1 となるのは, 1 回目と 2 回目のどちらか一方が 3 で割り切れて,
もう一方が 3 で割って余りが 1 となる場合

$$q_2 = \frac{2\times 4 + 4\times 2}{6\times 6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$　（答）

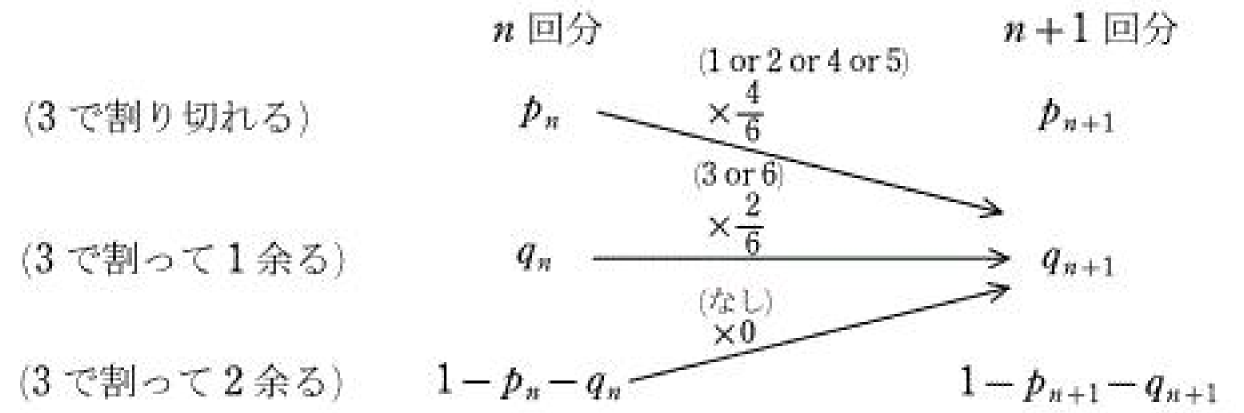
(3)　S_n と S_{n+1} を用いて, 推移図を使って考える.



よって,

$$p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{4}{6}(1 - p_n - q_n)$$

$$\Longleftrightarrow\ p_{n+1} = -\frac{1}{3}p_n - \frac{2}{3}q_n + \frac{2}{3}\quad (n \geqq 1)$$　……①（答）



よって,

$$q_{n+1} = \frac{4}{6}p_n + \frac{2}{6}q_n$$

$$\Longleftrightarrow\ q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n\ (n \geqq 1)\quad (n \geqq 1)$$　……②（答）

(4)　① − ②：$p_{n+1} - q_{n+1} = -p_n - q_n + \frac{2}{3}\ \ (n \geqq 1)$

$\therefore\ p_{n+2} - q_{n+2} = -(p_{n+1} - q_{n+1}) + \frac{2}{3}\ \ (n \geqq 0)$　……③

① + ②：$p_{n+1} + q_{n+1} = \frac{1}{3}(p_n - q_n) + \frac{2}{3}\ \ (n \geqq 1)$　……④

③, ④ より,

$$p_{n+2} - q_{n+2} = -\frac{1}{3}(p_n - q_n)$$

$$\Longleftrightarrow\ a_{n+2} = -\frac{1}{3}a_n$$

ここで, $a_n = p_n - q_n$ とおくと,

$$\therefore\ a_{n+2} = -\frac{1}{3}a_n\ \ (n \geqq 1)\ \left(a_1 = -\frac{1}{3},\ a_2 = -\frac{1}{3}\right)$$　（答）

(5)　・ $a_{2m+2} = -\frac{1}{3}a_{2m}\ \left(a_2 = -\frac{1}{3}\right)$

$b_m = a_{2m}$ とおく. $\left(b_1 = a_2 = -\frac{1}{3}\right)$　$b_{m+1} = -\frac{1}{3}b_m$ より,

$$\therefore\ b_m = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{m-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^m \Longleftrightarrow a_{2m} = \left(-\frac{1}{3}\right)^m\quad (m \geqq 1)$$

・ $a_{2m+1} = -\frac{1}{3}a_{2m-1}\ \left(a_1 = -\frac{1}{3}\right)$

$c_m = a_{2m-1}$ とおく. $\left(c_1 = a_1 = -\frac{1}{3}\right)$　$c_{m+1} = -\frac{1}{3}c_m$ より,

$$\therefore\ c_m = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{m-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^m \Longleftrightarrow a_{2m-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^m\quad (m \geqq 1)$$

以上をまとめて,

$$a_n = \begin{cases} \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}} & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \left(-\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}} & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$　（答）