[I]

(1)　$f(x)=x^2$ とおくと $f'(x)=2x$

よって $y=f(x)$ 上の点 $(a\,,\,a^2)$ における法線の方程式は、

　$f'(a)\{y-f(a)\}=-(x-a)$　（$a=0$ でも適する）

$\Leftrightarrow$　$2a(y-a^2)=-x+a$

$\Leftrightarrow$　$x+2ay-a-2a^3=0$　…①　…(答)

(2)　①が点 $(1\,,\,2)$ を通るとき、

　$1+2a\times 2-a-2a^3=0$

$\Leftrightarrow$　$(a+1)\left(2a^2-2a-1\right)=0$

$\Leftrightarrow$　$a=-1\,,\,\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

よって求める法線の数は 3 本　…(答)

(3)　①が点 $\left(t\,,\,t+\dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき、

　$t+2a\left(t+\dfrac{1}{2}\right)-a-2a^3=0$　（$a=-\dfrac{1}{2}$ では t が存在しない）

$\Leftrightarrow$　$t=\dfrac{2a^3}{2a+1}$

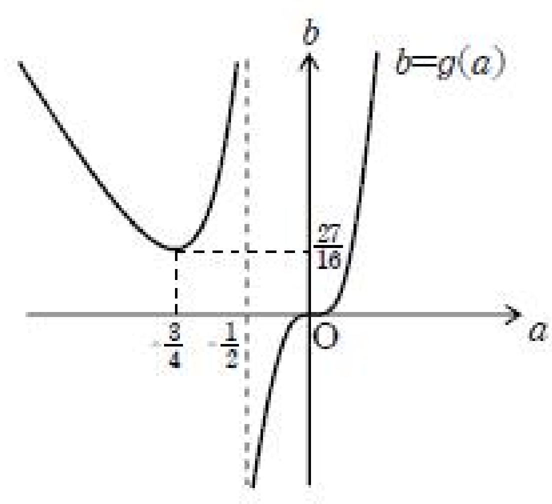
ここで $g(a)=\dfrac{2a^3}{2a+1}$ とおくと、$g'(a)=\dfrac{2a^2(4a+3)}{(2a+1)^2}$

よって右のグラフで $b=g(a)$ と $b=t$ が交点を 2 つだけ

もつ条件を考えることで、

　$t=\dfrac{27}{16}$　…答

a	…	$-\dfrac{3}{4}$	…	$-\dfrac{1}{2}$	…
$g'(a)$	$-$	0	$+$		$+$
$g(a)$	↘	$\dfrac{27}{16}$	↗		↗



[Ⅱ]

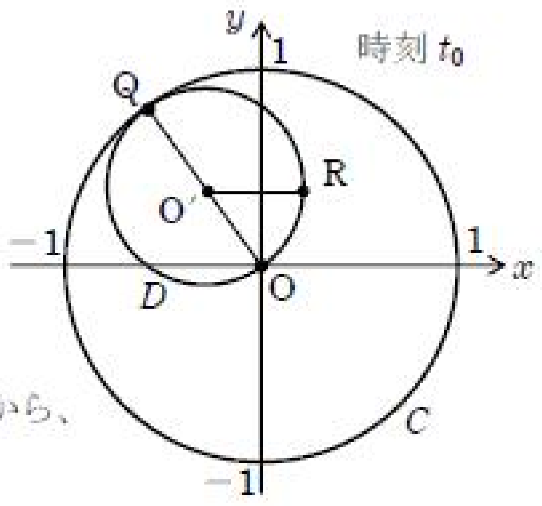
(1)　$\mathrm{Q}(\cos t\,,\,\sin t)$ とする。条件から円 C と円 D は時刻 t において点 Q で接しており、また円 D は原点を通っているから、円 D の中心の座標を O′ とすると O′ は線分 OQ の中点であるので、

$$\mathrm{O}'\left(\frac{1}{2}\cos t\,,\,\frac{1}{2}\sin t\right)$$

よって時刻 t_0 における円 D の中心の座標は、

$$\left(\frac{1}{2}\cos t_0\,,\,\frac{1}{2}\sin t_0\right)$$

この点と点 $\left(\frac{1}{4}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ (＝R とする)との距離は $\frac{1}{2}$ であるから、



$$\left(\frac{1}{2}\cos t_0-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin t_0-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$\Leftrightarrow\quad \sqrt{3}\sin t_0+\cos t_0=1$

$\Leftrightarrow\quad \sin\left(t_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$0\leqq t_0<2\pi$ で考えれば十分であり、

$$t_0+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{5}{6}\pi \text{ から、}\ t_0=0\,,\,\frac{2}{3}\pi$$

D の中心は第 2 象限にあるから $t_0=\frac{2}{3}\pi$

以上より D の中心の座標は、

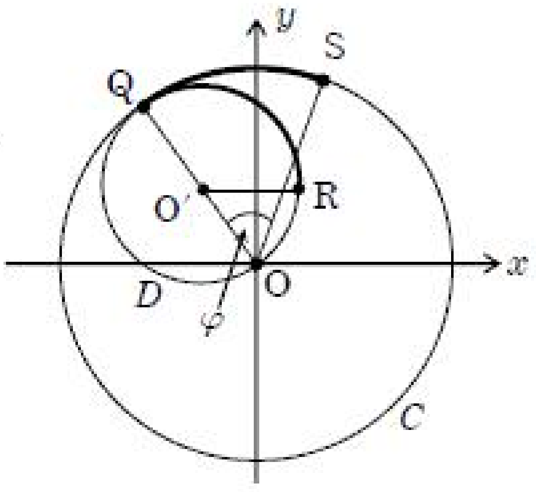
$$\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}\pi\,,\,\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\left(-\frac{1}{4}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\quad\cdots(\text{答})$$

(2)　求める点 P を S と表すと、右図において、

　劣弧 RQ の長さ＝劣弧 SQ の長さ

が成立する。$\angle\mathrm{SOQ}=\varphi$ として、

$\angle\mathrm{RO'Q}=\frac{2}{3}\pi$ とで、



$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi=1\cdot\varphi$$

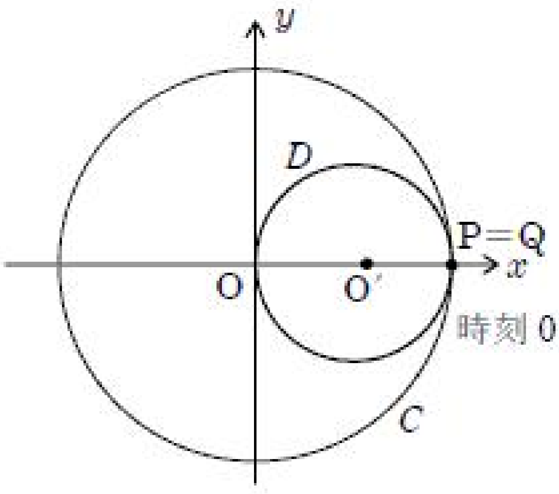
$\Leftrightarrow\quad \varphi=\frac{1}{3}\pi$

が成立する。よって、

$$\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\right),\ \sin\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{3}\pi\right)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\,,\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad\cdots(\text{答})$$

(3)　点 P が時刻 0 で点 $(1\,,\,0)$ にあったとして点 P の軌跡を考えてみる。時刻 t に $\angle\mathrm{PO'Q}=\varphi$ であるとすると、



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OO'}}+\overrightarrow{\mathrm{O'P}}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos(t-\varphi)\\ \sin(t-\varphi)\end{pmatrix}$$

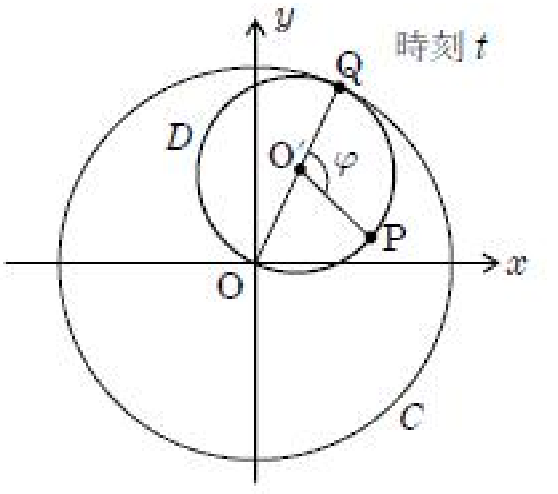
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos t+\cos(t-\varphi)\\ \sin t+\sin(t-\varphi)\end{pmatrix}$$

と書ける。また、

$$\frac{1}{2}\cdot\varphi=1\cdot t$$

$\Leftrightarrow\quad \varphi=2t$

を満たすので、



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos t+\cos(-t)\\ \sin t+\sin(-t)\end{pmatrix}$$

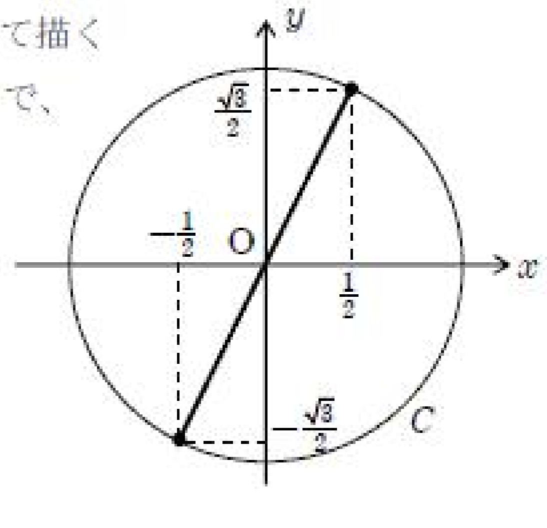
$$=\begin{pmatrix}\cos t\\ 0\end{pmatrix}$$

これは $0\leqq t<2\pi$ で線分 $y=0\,(-1\leqq x\leqq 1)$ を軌跡として描く

よって、(2)で求めた点 P を初期状態として考えることで、点 P は線分

$$y=\sqrt{3}x\ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}\right)$$

を描く。　…(答)



[Ⅲ]

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ について、

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

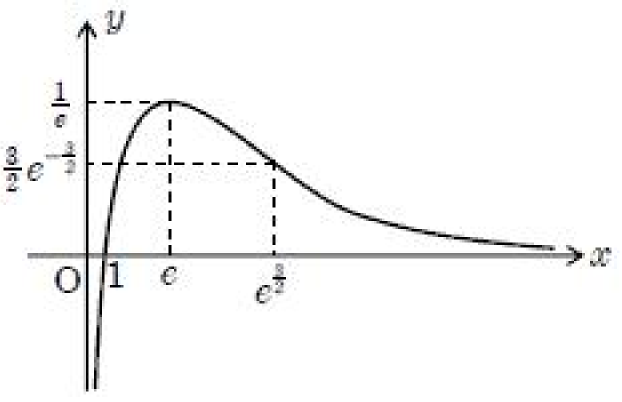
$$f''(x)=\frac{2\log x-3}{x^3}$$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$(-\infty)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘	(0)

(1)　$f(x)$ の増減は右上の通り。変曲点は $\left(e^{\frac{3}{2}},\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^t}=\lim_{u\to\infty}-ue^u=-\infty \quad (\log x=t,\ u=-t)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0 \quad (\log x=t)$$



よって y 軸，x 軸は漸近線である。
右のようなグラフになる。　…(答)

(2)　$f(x)$ は $1\leqq x\leqq e$ で増加するので、$k=1,2,3,\cdots,n$ で

区間 $\dfrac{k-1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{k}{n}$ において $f\left(e^{\frac{k-1}{n}}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(e^{\frac{k}{n}}\right)$

が成立する。よって、

$$M_k=f\left(e^{\frac{k}{n}}\right)=\frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}},\quad m_k=f\left(e^{\frac{k-1}{n}}\right)=\frac{\frac{k-1}{n}}{e^{\frac{k-1}{n}}}$$

である。よって、

$$A_n=\sum_{k=1}^{n}M_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{e^{\frac{k}{n}}}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

$$=\frac{1-e^{-\frac{1}{n}}}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)\quad\cdots(答)$$

$$B_n=\sum_{k=1}^{n}m_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k-1}{n}}{e^{\frac{k-1}{n}}}\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

$$=\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{n-1}{2}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\quad\cdots(答)$$

(3)　$A_n=\dfrac{n+1}{2n}\cdot\dfrac{e^{-\frac{1}{n}}-e^0}{\left(-\frac{1}{n}\right)-0}$

について、

$g(x)=e^x$，$g'(x)=e^x$

を考えると、平均値の定理より

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}}-e^0}{\left(-\frac{1}{n}\right)-0}=g'(c)=e^c,\quad -\frac{1}{n}<c<0$$

を満たす c が存在する。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c=0$ だから、

$$\lim_{n\to\infty}e^c=e^0=1$$

を満たす。よって、

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}\cdot e^c$$

$$=\frac{1+0}{2}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2}\quad\cdots(答)$$

$B_n=\dfrac{n-1}{2n}\cdot\dfrac{e^{\frac{1}{n}}-e^0}{\frac{1}{n}-0}$

について、平均値の定理より

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-e^0}{\frac{1}{n}-0}=g'(d)=e^d,\quad 0<d<\frac{1}{n}$$

を満たす d が存在する。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}d=0$ だから、

$$\lim_{n\to\infty}e^d=e^0=1$$

を満たす。よって、

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2}\cdot e^d$$

$$=\frac{1-0}{2}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2}\quad\cdots(答)$$

(4)　区間 $\dfrac{k-1}{n}\leqq x\leqq\dfrac{k}{n}$ において $m_k=f\left(e^{\frac{k-1}{n}}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(e^{\frac{k}{n}}\right)=M_k$

が成立するから、

$$\int_{e^{\frac{k-1}{n}}}^{e^{\frac{k}{n}}}m_k\,dx<\int_{e^{\frac{k-1}{n}}}^{e^{\frac{k}{n}}}f(x)\,dx<\int_{e^{\frac{k-1}{n}}}^{e^{\frac{k}{n}}}M_k\,dx$$

$$\Leftrightarrow\quad m_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)<\int_{e^{\frac{k-1}{n}}}^{e^{\frac{k}{n}}}f(x)\,dx<M_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

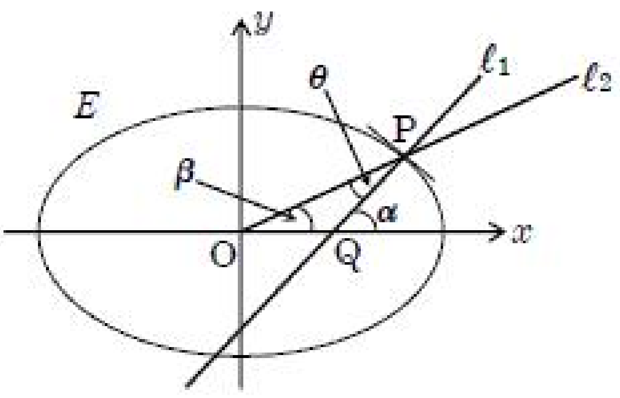
を満たす。よって、

$$\sum_{k=1}^{n}m_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)<\sum_{k=1}^{n}\int_{e^{\frac{k-1}{n}}}^{e^{\frac{k}{n}}}f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n}M_k\left(e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad B_n<\int_1^e f(x)\,dx<A_n$$　…証明終わり

[Ⅳ]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots①$$



の両辺をxで微分すると、

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

から、

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

よって、①上の点$P(s,t)(s>0,\ t>0)$における法線(ℓ_1とする)の傾きは、

$$\frac{a^2t}{b^2s}$$

である。直線OP(ℓ_2とする)の傾きは$\frac{t}{s}$であるから、

l_1とx軸の正方向，l_2とx軸の正方向なす角をそれぞれα,β（上の図の角）とすると、

$$\tan\alpha=\frac{a^2t}{b^2s},\quad \tan\beta=\frac{t}{s},\quad \tan\alpha>\tan\beta \quad \left(\frac{a^2}{b^2}>1\text{より}\right)$$

が成立する。l_1とl_2のなす角をθとすると、

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\alpha-\beta)\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\frac{a^2t}{b^2s}-\frac{t}{s}}{1+\frac{a^2t}{b^2s}\cdot\frac{t}{s}}\\&=\frac{a^2-b^2}{b^2\frac{s}{t}+a^2\frac{t}{s}}\end{aligned}$$

ここで$b^2\frac{s}{t}>0$，$a^2\frac{t}{s}>0$であるから相加平均・相乗平均の関係より

$$b^2\frac{s}{t}+a^2\frac{t}{s}\geqq 2\sqrt{b^2\frac{s}{t}\cdot a^2\frac{t}{s}}=2ab$$

を満たす。等号の成立は、

$$b^2\frac{s}{t}=a^2\frac{t}{s}$$

から$t=\frac{b}{a}s$のとき成立する。このとき$\tan\theta$は最大となり、

∠OPQは最大となる。よって、

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1,\quad t=\frac{b}{a}s$$

を$s>0$，$t>0$で解くと$s=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$t=\frac{b}{\sqrt{2}}$であるから、

$$P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right) \quad \cdots(\text{答})$$

[V]

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$

$=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2}$

$=-\dfrac{3}{2}$ …(答)

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{AC}|^2}{2}$

$=\dfrac{2^2+4^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2}{2}$

$=-2$ …(答)

$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2}{2}$

$=\dfrac{3^2+4^2-2^2}{2}$

$=\dfrac{21}{2}$ …(答)

(2) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}$

$=x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}$

CP⊥平面 H から、

CP⊥OA かつ CP⊥OB

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ かつ $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\Leftrightarrow$ $\left(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=0$ かつ $\left(x\vec{a}+y\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=0$

$\Leftrightarrow$ $x|\vec{a}|^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ かつ $x\vec{a}\cdot\vec{b}+y|\vec{b}|^2-\vec{c}\cdot\vec{b}=0$

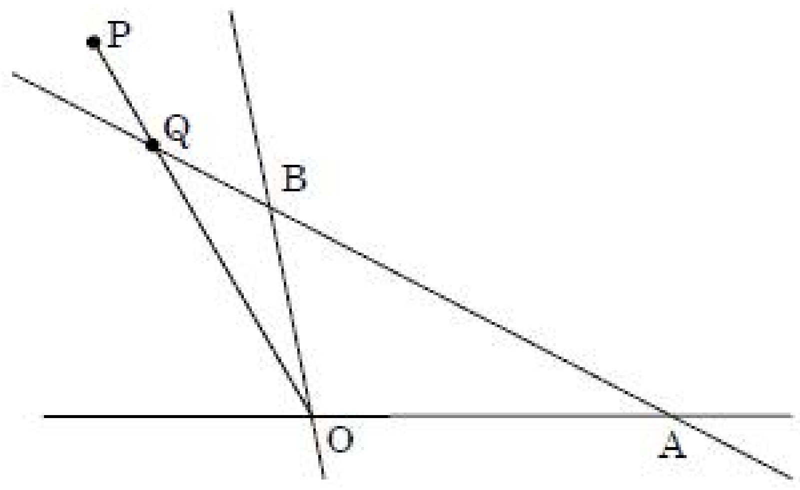
$\Leftrightarrow$ $4x-\dfrac{3}{2}y+2=0$ かつ $-\dfrac{3}{2}x+9y-\dfrac{21}{2}=0$

$\Leftrightarrow$ $x=-\dfrac{1}{15}$, $y=\dfrac{52}{45}$ …(答)

(3) $\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{15}\overrightarrow{OA}+\dfrac{52}{45}\overrightarrow{OB}$

$=\dfrac{49}{45}\cdot\dfrac{-3\overrightarrow{OA}+52\overrightarrow{OB}}{52+(-3)}$

より点Pは線分ABを52：3の比に外分する点をQとしたとき、線分OQを49：4の比に外分する点であるので、点Pはウの領域に入る。 …(答)



(4) 点Oから直線ABに垂線OHを下ろす。

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$

とするとOH⊥ABから、

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

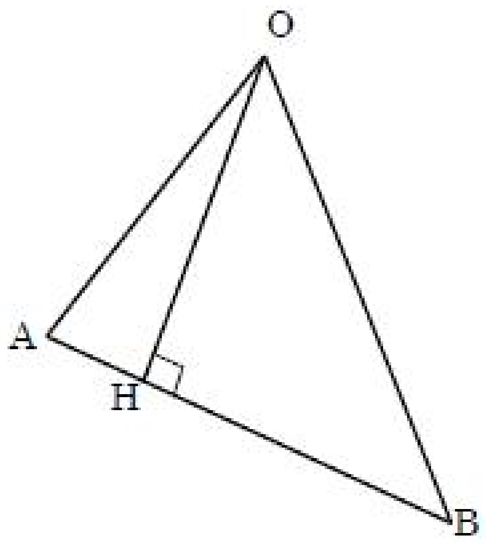
$\Leftrightarrow$ $\left\{\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}\right\}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+s|\overrightarrow{AB}|^2=0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2+16s=0$

$\Leftrightarrow$ $s=\dfrac{11}{32}$

よって $\overrightarrow{OH}=\dfrac{21}{32}\vec{a}+\dfrac{11}{32}\vec{b}$

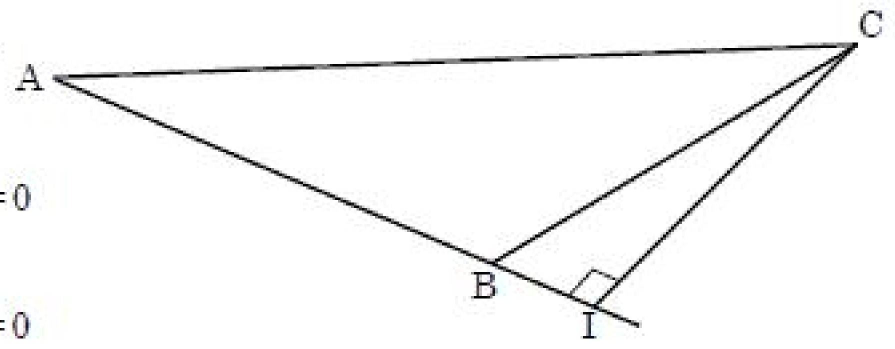


また点Cから直線ABに垂線CIを下ろす。

$\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}$

とするとCI⊥ABから、

$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$



$\Leftrightarrow$ $\left\{\overrightarrow{CA}+t\overrightarrow{AB}\right\}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}+t|\overrightarrow{AB}|^2=0$

$\Leftrightarrow$ $\left(\vec{a}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+16t=0$

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+16t=0$

$\Leftrightarrow$ $t=\dfrac{9}{8}$

よって $\overrightarrow{CI}=-\dfrac{1}{8}\overrightarrow{CA}+\dfrac{9}{8}\overrightarrow{CB}$

△ABCと△OABのなす角は $\overrightarrow{OH}$ と $\overrightarrow{CI}$ のなす角に等しいから、

$32\overrightarrow{OH}\cdot 8\overrightarrow{CI}=\left(21\vec{a}+11\vec{b}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{CA}+9\overrightarrow{CB}\right)$

$=\left(21\vec{a}+11\vec{b}\right)\cdot\left(-\vec{a}+9\vec{b}-8\vec{c}\right)$

$=-21|\vec{a}|^2+189\vec{a}\cdot\vec{b}-168\vec{c}\cdot\vec{a}$

$-11\vec{a}\cdot\vec{b}+99|\vec{b}|^2-88\vec{b}\cdot\vec{c}$

$=-48<0$

よって鈍角である。 …(答)