

1

(1) $0 \leq a \leq \pi, a < b$

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_a^b e^{-x} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} (e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x) \right]_a^b \\ &= -\frac{1}{2} (e^{-b} \sin b + e^{-b} \cos b) + \frac{1}{2} (e^{-a} \sin a + e^{-a} \cos a) \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①で、 $b = \infty$ を考えて、

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow \infty} I(a, b) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin a}{e^a} + \frac{\cos a}{e^a} \right) \\ &= \frac{1}{2e^a} (\sin a + \cos a) \end{aligned}$$

$$\sin a + \cos a = 0$$

$$\cos a = -\sin a$$

$$\therefore \tan a = -1$$

$0 \leq a \leq \pi$ より、

$$a = \frac{3}{4}\pi \dots \dots \text{(答)}$$

(2)

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1-0} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha + \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \\ AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha + \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha & -a\alpha + a\beta + b\beta \\ c\alpha & -c\alpha + c\beta + d\beta \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha + \beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha - c\alpha + c\beta & b\alpha - d\alpha + d\beta \\ c\beta & d\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

成分比較して、

$$\begin{cases} a\alpha = a\alpha - c\alpha + c\beta & \dots \textcircled{1} \\ -a\alpha + a\beta + d\beta = b\alpha - d\alpha + d\beta & \dots \textcircled{2} \\ c\alpha = c\beta & \dots \textcircled{3} \\ -c\alpha + c\beta + d\beta = d\beta & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

$\alpha \neq \beta$ なので、③より、

$$c = 0$$

$a + d = 3$ なので、②より、

$$\begin{aligned} -a\alpha + a\beta + d\beta &= b\alpha - (3-a)\alpha + (3-a)\beta \\ \Leftrightarrow b &= 3 - 2a \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 3-2a \\ 0 & 3-a \end{pmatrix} \\ a\alpha - bc &= 2 \\ \Leftrightarrow a(3-a) &= 2 \\ \therefore a &= 1, 2 \end{aligned}$$

よって、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dots \dots \text{(答)}$$

(3) c は正の実数

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{3^n} \quad (n \geq 1), \quad a_0 = c$$

両辺、 $\log_3$ をとって、

$$\log_3 a_n = 2 \log_3 a_{n-1} - n$$

$b_n = \log_3 a_n$ をとして、

$$b_n = 2b_{n-1} - n \quad (b_0 = \log_3 c)$$

よって、

$$b_{n+1} - (n+1) - 2 = 2(b_n - n - 2)$$

と表される。

$c_n = b_n - n - 2$ として、

$$c_{n+1} = 2c_n \quad (c_0 = b_0 - 2)$$

$\{c_n\}$ の一般項は、 $c_n = 2^n \cdot c_0 = 2^n \cdot (b_0 - 2)$ となる。

$$c_n = 2^n (b_0 - 2) = 2^n (\log_3 c - 2) = b_n - n - 2$$

$$\therefore b_n = 2^n (\log_3 c - 2) + n + 2$$

$$\log_3 a_n = b_n = 2^n (\log_3 c - 2) + n + 2 = \log_3 \left(\frac{c}{3} \right)^{2^n} \cdot 3^{n+2} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 a_n = \infty$ なので、

①が ∞ に発散する条件は、 $9 \leq c$ $\dots \dots \text{(答)}$

(4) $1 \leq t \leq 2 \quad y = (3t^2 - 4)x - 2t^3 \Leftrightarrow 2t^3 - 3xt^2 + 4x + y = 0$

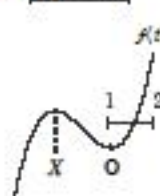
$2t^3 - 3xt^2 + 4x + y = 0$ について考える。

この直線が、 (X, Y) を通るとき、 $f(t) = 2t^3 - 3Xt^2 + 4X + Y = 0$

なる t が $1 \leq t \leq 2$ に存在する。 $\dots \dots \textcircled{1}$

$$f'(t) = 6t^2 - 6Xt = 6t(t - X)$$

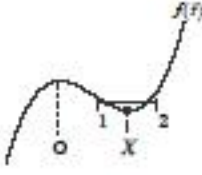
(i) $X \leq 0$



①の条件は、 $f(1) < 0$ かつ $f(2) > 0$

$$\therefore y < -x - 2 \text{ かつ } y > 8x - 16 \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

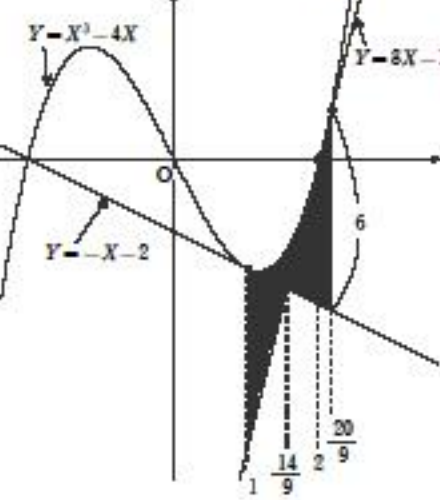
(ii) $X > 0$



①の条件は、

$$\begin{cases} 1 \leq X \leq 2 \\ f(1) \geq 0 \text{ かつ } f(2) \geq 0 \text{ または } f(1) \cdot f(2) < 0 \\ f(X) \leq 0 \end{cases} \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

②、③を図示して、 $1 \leq x \leq \frac{20}{9}$ を考えると、



斜線部の面積 S

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 ((x^3 - 4x) - (8x - 16)) dx + \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{6}{9} \right) \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 - 6x^2 + 16x \right]_1^2 + 2 \\ &= \frac{15}{4} \quad \dots \dots \text{(答)} \end{aligned}$$

$$OA = OB = OC = 1, OD = \sqrt{5}$$

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = t \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OD}|^2 &= |-\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &\quad + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 3 + 6t = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore t = \frac{1}{3}$$

$$|\overrightarrow{DA}|^2 = |-2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}|^2 = \frac{28}{3} \text{ より, } DA = DB = DC = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{4}{3} \text{ より, } AB = BC = CA = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\triangle ABC \text{ は正三角形なので, } S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{共面条件と, } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \text{ より, 図の } \overrightarrow{OH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$$

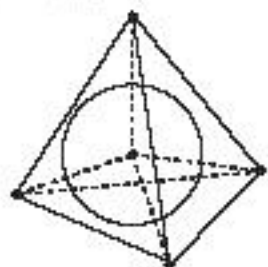
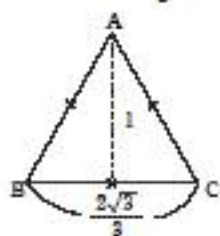
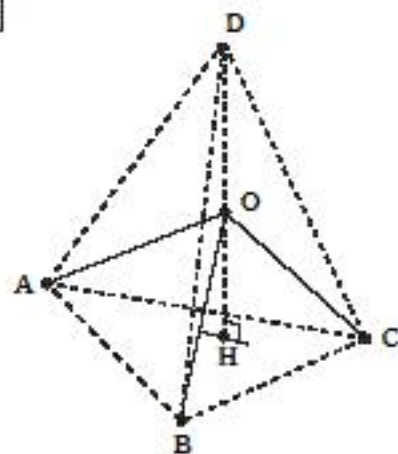
$$\therefore OH = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$V_{DABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overrightarrow{DH} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{3} \right) = \frac{4\sqrt{15}}{27}$$

$$\text{また, } S_{DAB} = \sqrt{3}, V_{DABC} = \frac{1}{3} r (S_{ABC} + S_{DAB} + S_{DBC} + S_{DCA}) \text{ と表されるので,}$$

$$\frac{4\sqrt{15}}{27} = \frac{1}{3} r \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + 3 \cdot \sqrt{3} \right) \text{ より,}$$

$$r = \frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$



内接球の
半径 r

「すべての実数が x で $f'(x) > 0$ 」... $y = f(x)$ は単調増加

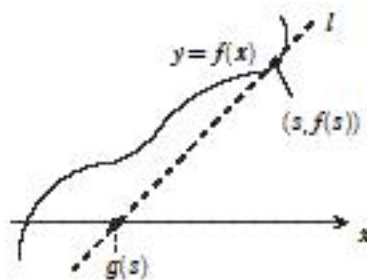
「 $f'(x)$ は極大値をもつ」... $f''(\alpha) = 0$ なる実数 α が存在する。

$y = f(x)$ の $(s, f(s))$ における接線 l は

$$l: y - f(s) = f'(s)(x - s)$$

l と x 軸の交点は、

$$(g(s), 0) = \left(s - \frac{f(s)}{f'(s)}, 0 \right)$$



$$(1) \quad g'(s) = 1 - \frac{f'(s) \cdot f'(s) - f(s) \cdot f''(s)}{(f'(s))^2} = \frac{f(s) \cdot f''(s)}{(f'(s))^2} \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots \text{---(答)}$$

(2) 題意の条件より、 $f'(x) > 0$ なので、 $\textcircled{1}$ の分母は常に正である。

よって、 $g'(s)$ の符号の変化は $\textcircled{1}$ の分子のみから決定される。

いま、 $f(s)$ は単調増加なので、

$$\underline{\underline{- \rightarrow 0 \rightarrow +}} \text{ の順に変化する. } (f(\alpha) = 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

$f'(x)$ が $x = \beta$ で極大値をもつとする。

$x < \beta$ で常に $f''(x) < 0$ ならば、 $f'(x) > 0$ は守られないので、

$f''(x)$ は β 以外にも $f''(x) = 0$ なる $x = \gamma$ をもち、

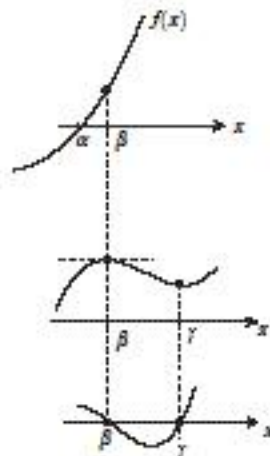
そのとき、 $f'(x)$ は極大値をとる。

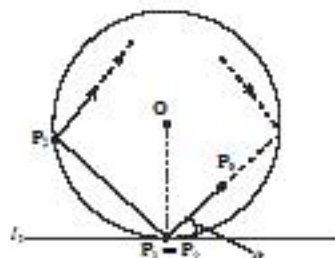
つまり、 $f''(s)$ は、

$$\underline{\underline{+ \rightarrow 0 \rightarrow - \rightarrow 0 \rightarrow +}} \text{ の順に変化する. } \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ より、 $\textcircled{1}$ は2回以上符号変化するので、

$g(s)$ は極大値、極小値をもつ。





動点がちょうど1周回って $P_m = P_1$ となるときの

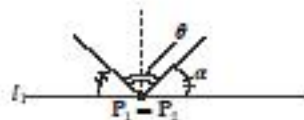
動点は、正 $(m-1)$ 角形を描くので、

$$\theta = \frac{m-3}{m-1}\pi$$

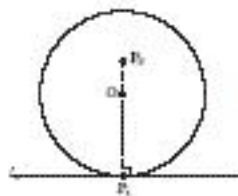
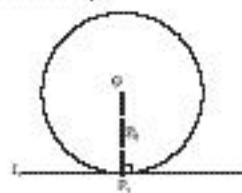
$$\alpha = \frac{\pi}{m-1}$$

ただし、何周か回って P_m が P_1 と一致するときも考えて

$$\alpha = \frac{n}{m-1}\pi = k\pi \left(k \text{ は } 0 < k \leq \frac{1}{2} \text{ なる有理数} \right) \dots\dots (\text{答})$$

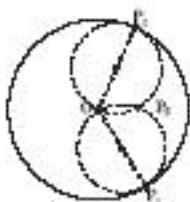


(2) $\max \alpha$



$\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき α は最大値をとる。

$\min \alpha$



$\min \alpha$ は、 $\angle P_0 P_1 O$ が $\max$ になるときである。
 $\angle P_0 P_1 O$ が $\max$ となるような P_1 のとり方は
 OP_0 を弦とする円のうち、円 C と共有点をもつ
 最小の円と、円 C との共有点に P_1 があるとき。

(3) $P_4 = P_1$ のとき、動点は正三角形を描く。

すなわち、そのような P_1 を取るためには、

P_0 は円 C に内接する正三角形の辺上に存在し得る必要がある。

正三角形の辺と、円 C の中心の距離を考えて、 P_0 の存在範囲は

右図のようになる。

