

1

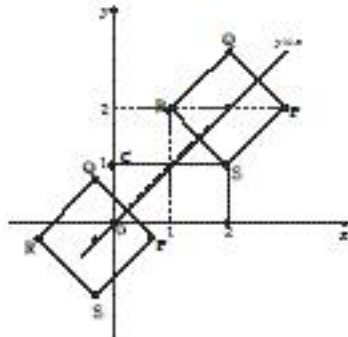
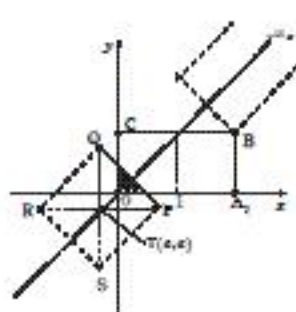
$$(1) \quad 3 \quad \dots \boxed{\text{ア}}$$

$$(2) \quad 3x-3 \quad \dots \boxed{\text{イ}}$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \dots \boxed{\text{ウ}}$$

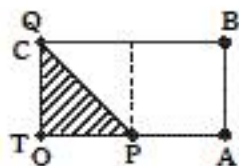
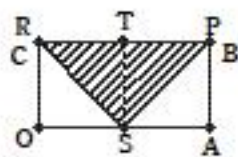
$$(4) \quad \frac{1}{2} \quad \dots \boxed{\text{エ}}$$

(1)



右上の図より、 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ である。

(2)

 $a=0$  $a=1$

$a=0$ から $a=1$ の範囲で考えれば十分である。

(i) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ 

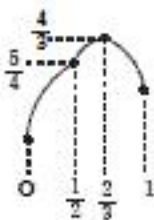
$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2}(1-2a)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot a \\ &= -a^2 + 2a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ 

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2}(1-2a)^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}(3a-1)(1-a) \\ &= -3a^2 + 4a \end{aligned}$$

(i), (ii)より, グラフを考えて,

$$\max S = \frac{4}{3} \left(a = \frac{2}{3} \right) \quad \dots (\text{答})$$



3 $\overrightarrow{OP} = \vec{p}, \overrightarrow{OA_i} = \vec{a_i}$ とする.

$$f(P) = \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{PA_i}|^2 \text{ は } P=C \text{ のとき最小値 } m \text{ とする.}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad f(P) &= \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{PA_i}|^2 = |\vec{a_1} - \vec{p}|^2 + |\vec{a_2} - \vec{p}|^2 + \dots + |\vec{a_{100}} - \vec{p}|^2 \\ &= 100|\vec{p}|^2 - 2(\vec{a_1} \cdot \vec{p} + \vec{a_2} \cdot \vec{p} + \dots + \vec{a_{100}} \cdot \vec{p}) + (|\vec{a_1}|^2 + |\vec{a_2}|^2 + \dots + |\vec{a_{100}}|^2) \\ &= 100 \left\{ \vec{p} - \frac{1}{100}(\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_{100}}) \right\}^2 + (\text{定数}) \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

①は $\vec{p} = \frac{1}{100}(\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_{100}})$ のとき, **min** をとる.

このとき, $\vec{p} = \overrightarrow{OC}$ $\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \vec{a_i}$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{i=1}^{100} \left(\sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_i A_j}|^2 \right) &= |\vec{a_1} - \vec{a_2}|^2 + |\vec{a_1} - \vec{a_3}|^2 + \dots \\ &= 198(|\vec{a_1}|^2 + |\vec{a_2}|^2 + \dots + |\vec{a_{100}}|^2) - 4(\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} + \vec{a_1} \cdot \vec{a_3} + \dots + \vec{a_{99}} \cdot \vec{a_{100}}) \quad \dots\dots ② \\ &= 4000 \end{aligned}$$

①より, 定数部分を考えて

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{100}(\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_{100}}) \cdot (\vec{a_1} + \vec{a_2} + \dots + \vec{a_{100}}) + (|\vec{a_1}|^2 + |\vec{a_2}|^2 + \dots + |\vec{a_{100}}|^2) \\ &= \frac{1}{100} \{ 99(|\vec{a_1}|^2 + |\vec{a_2}|^2 + \dots + |\vec{a_{100}}|^2) - 2(\vec{a_1} \cdot \vec{a_2} + \vec{a_1} \cdot \vec{a_3} + \dots) \} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

②, ③を比較して

$$4000 = 200m \quad \therefore m = 20$$

(3) $P=C$ のときを考えて

$$m = \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{CA_i}|^2 = |\overrightarrow{CA_1}|^2 + |\overrightarrow{CA_2}|^2 + \dots + |\overrightarrow{CA_{100}}|^2 = 20$$

すべての項は0以上であるので, $|\overrightarrow{CA_i}|^2 \geq 4$ をみたす整数 i の個数の最大値は

$$20 \div 4 = 5 \quad \therefore 5 \text{ 個}$$

(このとき, 残りの95個の点 A は C と一致する)