

1 (1) $y = x^2 + k$ の点 $P(p, p^2 + k)$
 の接線は, $y' = 2x$ より
 $y = 2p(x - p) + p^2 + k$
 $\Leftrightarrow y = 2px - p^2 + k$

$\therefore l: y = 2px - p^2 + k$

(2) $y = x^2$ と $y = 2px - p^2 + k$ との交点,
 $x^2 = 2px - p^2 + k$

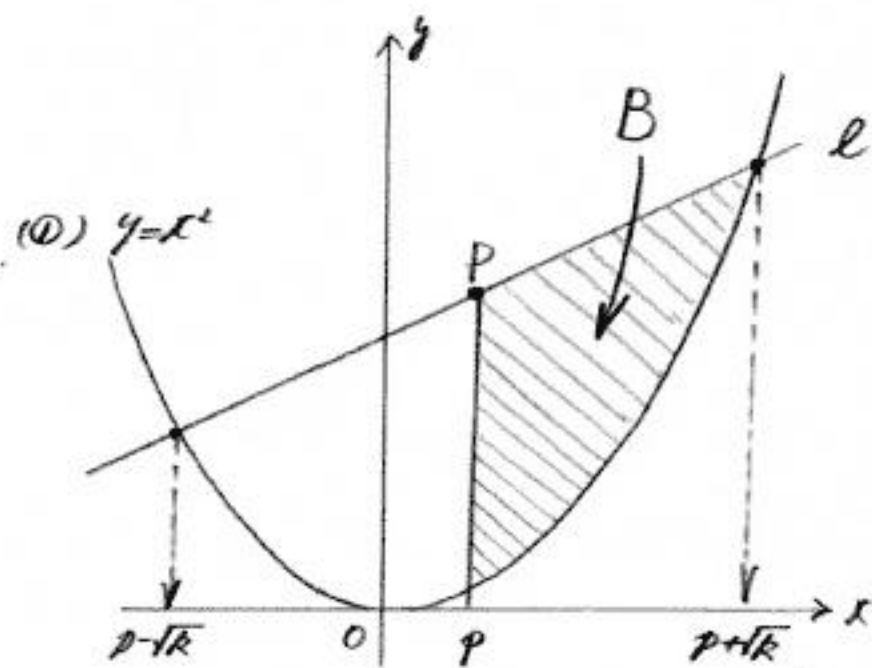
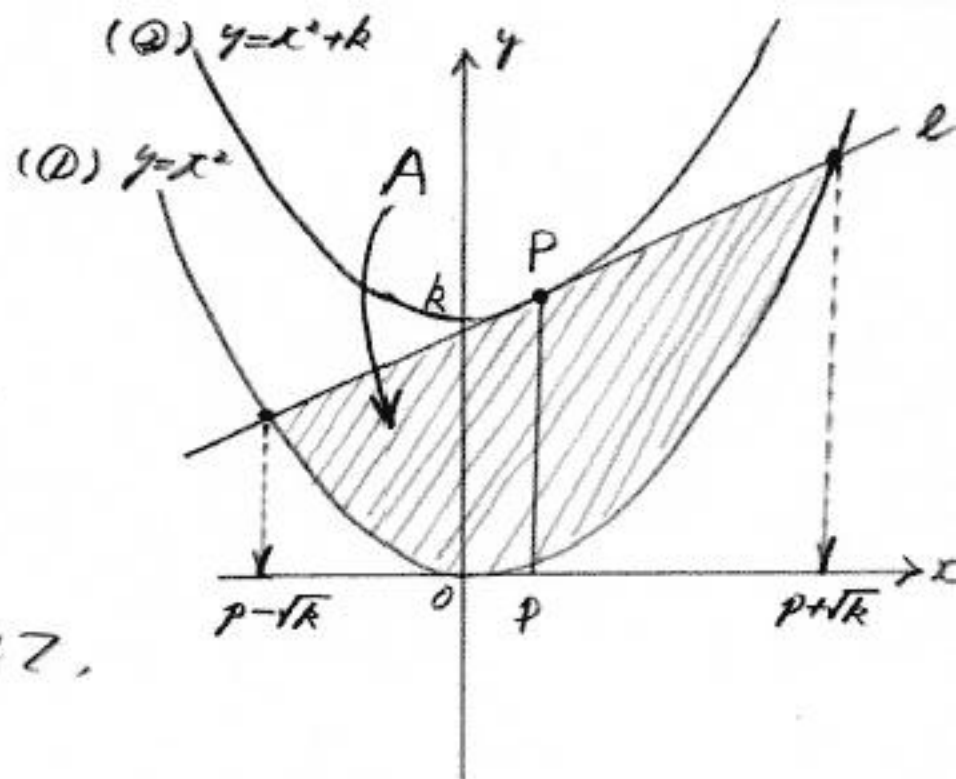
$\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 = k$

$\Leftrightarrow (x - p)^2 = k \quad \therefore x = p \pm \sqrt{k} \quad (k \geq 0 \text{ のとき})$

(3) (領域 A の面積) $= \int_{p-\sqrt{k}}^{p+\sqrt{k}} \{ (2px - p^2 + k) - x^2 \} dx$
 $= - \int_{p-\sqrt{k}}^{p+\sqrt{k}} \{ x - (p - \sqrt{k}) \} \{ x - (p + \sqrt{k}) \} dx$
 $= \frac{4}{3} k \sqrt{k}$

(4) 領域 A と 領域 $x \geq p$ の
 共通部分の領域を B とする

(領域 B の面積) $= \int_p^{p+\sqrt{k}} \{ (2px - p^2 + k) - x^2 \} dx$
 $= \left[px^2 + (k - p)x - \frac{x^3}{3} \right]_p^{p+\sqrt{k}}$
 $= \frac{2}{3} k \sqrt{k}$



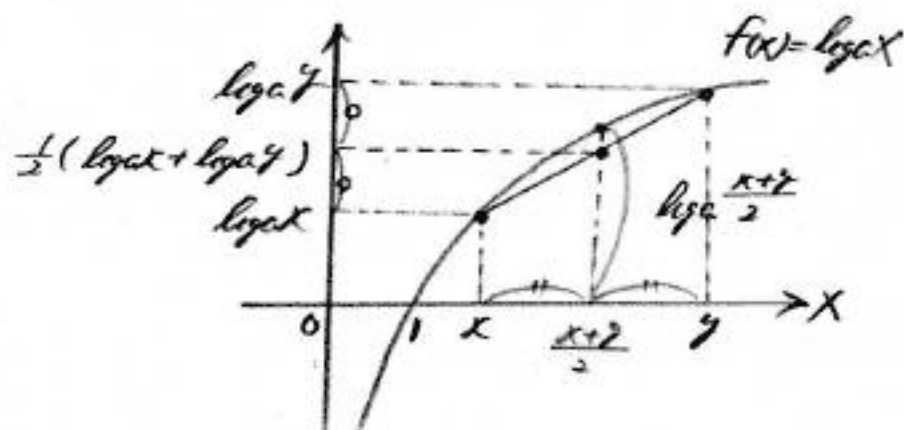
2

(1) (i) $a > 1$ とき, $f(x) = \log_a x$

↑ ↑ ↑ 増加関数

2点 $(x, \log_a x), (y, \log_a y)$ の中間の商と $f(\frac{x+y}{2})$ の商とを比較して

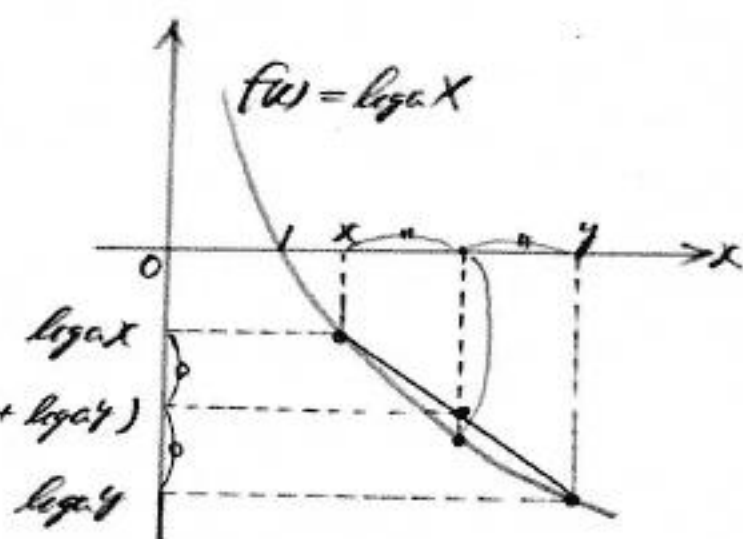
$$\log_a \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y) \quad (\text{等号成立は } x=y \text{ とき})$$

(ii) $0 < a < 1$ とき, $f(x) = \log_a x$

↑ ↑ ↑ 減少関数

2点 $(x, \log_a x), (y, \log_a y)$ の中間の商と $f(\frac{x+y}{2})$ の商とを比較して

$$\log_a \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y)$$

(等号成立は $x=y$ とき)

$$\text{よって (i), (ii) より } \begin{cases} \log_a \frac{x+y}{2} \geq \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y) & (a > 1 \text{ とき}) \\ \log_a \frac{x+y}{2} \leq \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y) & (0 < a < 1 \text{ とき}) \end{cases}$$

(等号成立は $x=y$ とき)

$$(2) \log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y \quad (\text{真数条件より } x > 0, y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \log_a(x+y) = \log_a xy$$

$$\Leftrightarrow x+y = xy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{y} = 1 - \frac{1}{x} > 0 \text{ より } 0 < \frac{1}{x} < 1 \\ \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{y} > 0 \text{ より } 0 < \frac{1}{y} < 1 \end{cases}$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{x} < 1, 0 < \frac{1}{y} < 1 \quad (\text{すなわち } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \text{ である})$$

(3) (2) の $x+y=xy$ と $k=2x+y$ に関する

$$x + (k-x) = x(k-x)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (k+1)x + k = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

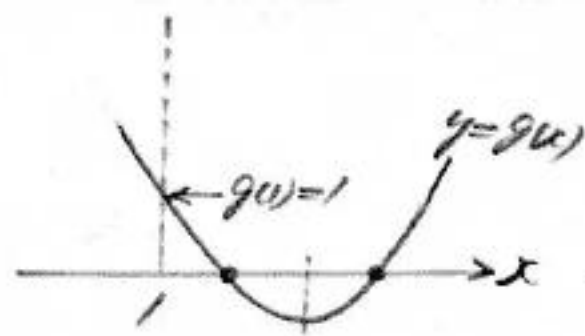
0 < $\frac{1}{x} < 1$ より $x > 1$ だから、①の x の2次方程式が $x > 1$ に
2個の実数解を持つ必要がある。

$$g(x) = 2x^2 - (k+1)x + k \quad \text{と置く}$$

$$g(1) = 1 > 0 \text{ に注意して}$$

$$\begin{cases} \text{(軸)} \frac{k+1}{4} > 1 \\ D = (k+1)^2 - 8k \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 3 \\ k \leq 3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2} \leq k \end{cases}$$

$$\therefore \text{よって } k \geq 3+2\sqrt{2}$$

(4) (2) より $xy - x - y = 0$ (すなわち $x > 1, y > 1$ の整数)

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1) = 1$$

 $x-1, y-1$ は正の整数だから

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=1 \end{cases} \therefore (x, y) = (2, 2)$$

$$3 \quad (1) \begin{cases} \alpha - \beta = 2\theta \\ \alpha + \beta = 3\theta \end{cases} \quad \therefore \underline{\alpha = \frac{5}{2}\theta, \beta = \frac{1}{2}\theta}$$

(2) 余弦定理より

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$$

$$- \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin\alpha \sin\beta \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \textcircled{2}, \quad \cos 2\theta = \cos 3\theta \Leftrightarrow \cos 3\theta - \cos 2\theta = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \begin{cases} \alpha + \beta = 3\theta \\ \alpha - \beta = 2\theta \end{cases} \quad \text{と} \textcircled{170}, (1) \text{の結果を用いて}$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow -2 \sin \frac{5}{2}\theta \cdot \sin \frac{1}{2}\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{5}{2}\theta \cdot \sin \frac{1}{2}\theta = 0$$

$$(\text{ただし}, 0 \leq \frac{1}{2}\theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \frac{5}{2}\theta \leq \frac{5}{2}\pi)$$

$$\therefore \frac{1}{2}\theta = 0 \text{ または } \frac{5}{2}\theta = 0, \pi, 2\pi$$

$$\therefore \underline{\theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi}$$

$$(3) \quad \cos 2\theta = \cos 3\theta$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\therefore \cos\theta = 1, \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$(\theta=0) \quad (\theta=\frac{2}{5}\pi) \quad (\theta=\frac{4}{5}\pi)$$

(4) 外接円の中心 O まで

三角形 OAB を余弦定理より

$$R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos \frac{2}{5}\pi = 1^2$$

$$\Leftrightarrow 2R^2 - 2R^2 \cdot \frac{-1+\sqrt{5}}{4} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{5}}{2} R^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{2}{5-\sqrt{5}}$$

$$\therefore \underline{R^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

