

[1]

(1) $\alpha = p + qi$, $\beta = r + si$ (p, q, r, s は実数) とする。このとき,

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (p+qi)(r+si) \\ &= pr - qs + (ps + qr)i\end{aligned}$$

であり,

$$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow pr - qs = 0 \quad \text{かつ} \quad ps + qr = 0$$

である。このとき,

$$\begin{aligned}(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) &= p^2r^2 + p^2s^2 + q^2r^2 + q^2s^2 \\ &= (pr - qs)^2 + (ps + qr)^2 \\ &= 0^2 + 0^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

より $p^2 + q^2 = 0$ または $r^2 + s^2 = 0$ が成立する。つまり,

$$\alpha = 0 \quad \text{または} \quad \beta = 0$$

である。 …(証明終わり)

(2) $\alpha = p + qi$ (p, q は実数) とする。このとき,

$$\alpha^2 = p^2 - q^2 + 2pqi$$

であり,

$$\alpha^2 \text{ が正の実数} \Leftrightarrow p^2 - q^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad 2pq = 0$$

である。このとき $q \neq 0$ とすると $p = 0$ であり,

$$p^2 - q^2 = -q^2 > 0$$

となり矛盾。よって $q = 0$ であるが、このとき α は実数である。 …(証明終わり)

(3) 条件より,

$$(\alpha_1\alpha_2)(\alpha_2\alpha_3)\cdots(\alpha_{2n+1}\alpha_1) = (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1})^2$$

の左辺は正の実数であるから、(2)の結果より

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1} \text{ は } 0 \text{ でない実数} \quad \cdots\textcircled{1} \quad (0 \text{ だと矛盾})$$

である。ここで、 α_1 が実数でないと仮定すると,

$$\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{2n+1} \text{ は実数ではない。} (\textcircled{1} \text{ よりこれが } 0 \text{ である可能性は無い})$$

(もし 0 でない実数であるとする $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1}$ は実数ではなくなる)

しかし条件より,

$$\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\cdots\alpha_{2n}\alpha_{2n+1} \text{ は正の実数}$$

だからこれは矛盾。よって α_1 は実数である。

以下、同様にして $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{2n+1}$ も全て実数であることが言える。 …(証明終わり)

〔Ⅱ〕

数列 $\{a_n\}$ は $a_{n+1} - a_n = -[\sqrt{a_n}]$ より広義の減少数列である。

(1) $a_0 = 24$ のとき,

$$a_1 = a_0 - [\sqrt{a_0}] = 24 - [\sqrt{24}] = 24 - 4 = 20$$

$$a_2 = a_1 - [\sqrt{a_1}] = 20 - [\sqrt{20}] = 20 - 4 = 16$$

$$a_3 = a_2 - [\sqrt{a_2}] = 16 - [\sqrt{16}] = 16 - 4 = 12$$

$$a_4 = a_3 - [\sqrt{a_3}] = 12 - [\sqrt{12}] = 12 - 3 = 9$$

$$a_5 = a_4 - [\sqrt{a_4}] = 9 - [\sqrt{9}] = 9 - 3 = 6$$

$$a_6 = a_5 - [\sqrt{a_5}] = 6 - [\sqrt{6}] = 6 - 2 = 4$$

$$a_7 = a_6 - [\sqrt{a_6}] = 4 - [\sqrt{4}] = 4 - 2 = 2$$

$$a_8 = a_7 - [\sqrt{a_7}] = 2 - [\sqrt{2}] = 2 - 1 = 1$$

$$a_9 = a_8 - [\sqrt{a_8}] = 1 - [\sqrt{1}] = 1 - 1 = 0 \quad (\text{これ以降, } 0 \text{ が続く})$$

よって, $a_n = 0$ となる最小の n は, $n = 9$ …(答)

(2) $a_0 = m^2$, $1 \leq j \leq m$ のとき,

$$\left. \begin{aligned} a_{2j-1} &= (m-j)(m-j+1) \\ a_{2j} &= (m-j)^2 \end{aligned} \right\} \text{①}$$

であることを数学的帰納法にて示す。

$$a_1 = a_0 - [\sqrt{a_0}] = m^2 - [\sqrt{m^2}] = m^2 - m = (m-1)(m-0)$$

$$a_2 = a_1 - [\sqrt{a_1}] = m^2 - m - [\sqrt{m^2 - m}]$$

について,

$$(m-1)^2 < (m-1)m < m^2 \quad (m \geq 2)$$

を満たすから,

$$[\sqrt{m^2 - m}] = m - 1$$

であるので,

$$a_2 = m^2 - m - (m-1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

以上より①は $j=1$ で成立する。次に $j=k$ ($1 \leq k \leq m-1$) のとき, ①の成立

$$a_{2k-1} = (m-k)(m-k+1)$$

$$a_{2k} = (m-k)^2$$

と仮定する。このとき,

$$a_{2k+1} = a_{2k} - [\sqrt{a_{2k}}] = (m-k)^2 - [\sqrt{(m-k)^2}]$$

$$= (m-k)^2 - (m-k)$$

$$= \{m - (k+1)\}(m-k)$$

$$a_{2k+2} = a_{2k+1} - [\sqrt{a_{2k+1}}]$$

$$= \{m - (k+1)\}(m-k) - [\sqrt{\{m - (k+1)\}(m-k)}]$$

について,

$$\{m - (k+1)\}^2 < \{m - (k+1)\}(m-k) < (m-k)^2 \quad (m \geq 2)$$

を満たすから,

$$[\sqrt{\{m - (k+1)\}(m-k)}] = m - (k+1)$$

であるので,

$$a_{2k+2} = \{m - (k+1)\}(m-k) - \{m - (k+1)\}$$

$$= \{m - (k+1)\}^2$$

以上より①は $j=k+1$ でも成立する。よって,

$1 \leq j \leq m$ のとき,

$$a_{2j-1} = (m-j)(m-j+1), \quad a_{2j} = (m-j)^2 \quad \dots(\text{答})$$

(3) $1 \leq p \leq m-1$ のとき, $a_{2p} = (m-p)^2$ …②

であることを数学的帰納法にて示す。

(i) $p=1$ のとき,

$$a_0 = m^2 - 1, \quad (m-1)^2 < (m-1)(m+1) = m^2 - 1 < m^2 \text{ であるから,}$$

$$a_1 = a_0 - [\sqrt{a_0}] = m^2 - 1 - (m-1) = (m-1)m$$

$$(m-1)^2 < (m-1)m < m^2 \text{ であるから,}$$

$$a_2 = a_1 - [\sqrt{a_1}] = (m-1)m - (m-1) = (m-1)^2$$

より②は $p=1$ で成立する。

(ii) $p=q$ ($1 \leq q \leq m-2$) のとき, ②が成立すると仮定すると,

$$a_{2q} = (m-q)^2$$

である。このとき,

$$a_{2q+1} = a_{2q} - [\sqrt{a_{2q}}] = (m-q)^2 - (m-q)$$

$$= \{m - (q+1)\}(m-q)$$

$$\{m - (q+1)\}^2 < \{m - (q+1)\}(m-q) < (m-q)^2 \text{ であるから,}$$

$$a_{2q+2} = a_{2q+1} - [\sqrt{a_{2q+1}}] = \{m - (q+1)\}(m-q) - \{m - (q+1)\}^2$$

$$= \{m - (q+1)\}^2$$

よって②は $p=q+1$ でも成立する。数列 $\{a_n\}$ が自然数値を取る間は狭義の減少数列なので,

$$k = 2p \quad \dots(\text{答})$$

以上の結果より, $a_0 = m^2 - p$ のとき, $a_{2p} = (m-p)^2$ であり, (2)の結果より繰り返し計算すると,

$$a_{2p+2} = \{m - (p+1)\}^2, \quad a_{2p+4} = \{m - (p+2)\}^2, \quad \dots, \quad a_{2m-2} = \{m - (m-1)\}^2 = 1$$

$$\text{となるから, } a_{2m-1} = a_{2m-2} - [\sqrt{a_{2m-2}}] = 1 - 1 = 0$$

よって $a_n = 0$ となる最小の n は,

$$n = 2m - 1 \quad \dots(\text{答})$$

【Ⅲ】

(1) $P(A_n)$ について,

$$\begin{aligned} P(A_n) &= 1 - P(\overline{A_n}) \\ &= 1 - \{(n \text{ 回全て裏が出る確率}) + (n \text{ 回中 1 回だけ表が出る確率})\} \\ &= 1 - \{(1-a)^n + {}_n C_1 a^1 (1-a)^{n-1}\} \\ &= 1 - (1-a)^{n-1} (1-a + na) \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

$P(B_n)$ について, これは 1 度でも裏が出た場合, それ以降は最後 (n 回目) までずっと裏が出る確率である。全て表が出る事象も考慮して,

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \sum_{k=0}^n a^k (1-a)^{n-k} \\ &= (1-a)^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{1-a} \right)^k \\ &= (1-a)^n \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{a}{1-a} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{a}{1-a}} \\ &= \frac{1}{1-2a} \{ (1-a)^{n+1} - a^{n+1} \} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) $P(A_n \cap B_n)$

$$= P(B_n) - P(\overline{A_n} \cap B_n)$$

ここで事象 $\overline{A_n} \cap B_n$ は n 回とも裏が出る事象と

n 回中に表が 1 回だけ, それも 1 回目に出る事象の和事象であるから,

$$\begin{aligned} P(\overline{A_n} \cap B_n) &= (1-a)^n + a(1-a)^{n-1} \\ &= (1-a)^{n-1} \end{aligned}$$

よって(1)の結果とで,

$$\begin{aligned} P(A_n \cap B_n) &= \frac{1}{1-2a} \{ (1-a)^{n+1} - a^{n+1} \} - (1-a)^{n-1} \\ &= \frac{a^2}{1-2a} \{ (1-a)^{n-1} - a^{n-1} \} \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

(3) $\frac{P(A_n)P(B_n)}{P(A_n \cap B_n)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\{ 1 - (1-a)^{n-1} (1-a + na) \} \cdot \frac{1}{1-2a} \{ (1-a)^{n+1} - a^{n+1} \}}{\frac{a^2}{1-2a} \{ (1-a)^{n-1} - a^{n-1} \}} \\ &= \frac{\{ 1 - (1-a)^n - an(1-a)^{n-1} \} \left\{ (1-a)^2 - a^2 \left(\frac{a}{1-a} \right)^{n-1} \right\}}{a^2 \left\{ 1 - \left(\frac{a}{1-a} \right)^{n-1} \right\}} \end{aligned}$$

ここで $0 < a < \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2} < 1-a < 1$, $0 < \frac{a}{1-a} < 1$ だから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-a} \right)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (1-a)^n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-a)^n = 0$$

よって,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(A_n)P(B_n)}{P(A_n \cap B_n)} &= \frac{\{ 1 - 0 - a \cdot 0 \} \{ (1-a)^2 - a^2 \cdot 0 \}}{a^2 (1-0)} \\ &= \left(\frac{1-a}{a} \right)^2 \quad \dots(\text{答}) \end{aligned}$$

※(2)は

$$\begin{aligned} P(A_n \cap B_n) &= 1 - P(\overline{A_n \cap B_n}) \\ &= 1 - P(\overline{A_n} \cup \overline{B_n}) \\ &= 1 - \{ P(\overline{A_n}) + P(\overline{B_n}) - P(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) \} \\ &= P(B_n) - P(\overline{A_n}) + P(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) \\ P(\overline{A_n} \cap \overline{B_n}) &= {}_{n-1} C_1 a^1 (1-a)^{n-1} \end{aligned}$$

からも計算可能。

[IV]

$$\begin{aligned}(1) \quad f'(x) &= \frac{(1+\sqrt{1-x^2})'}{1+\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}(-2x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x} \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} (<0) \quad \dots(\text{答})\end{aligned}$$

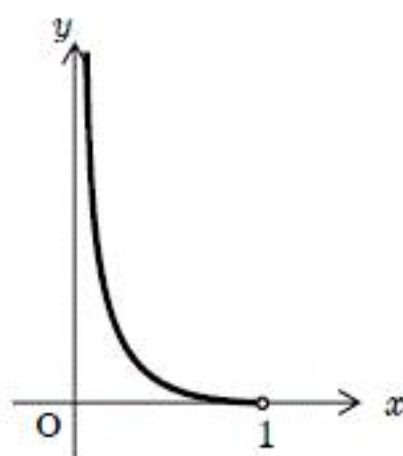
$$(2) \quad f''(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}} > 0$$

よって $y=f(x)$ のグラフは $0 < x < 1$ で減少し、
かつ下に凸である。

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = 0$$

とで右のようなグラフになる。

(y 軸は漸近線)



(3) $y=f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における接線の傾きは

$$f'(t) = \frac{-\sqrt{1-t^2}}{t}$$

より,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} \\ &= \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \log(1+\sqrt{1-t^2}) - \log t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \log \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

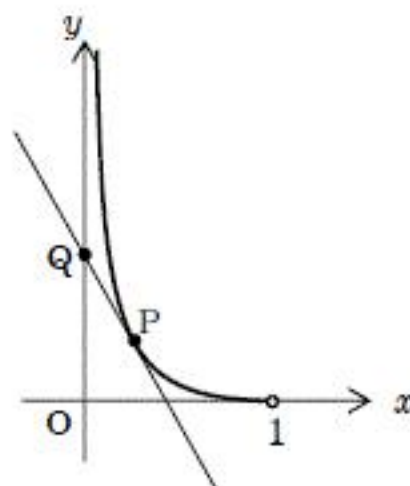
よって点 Q は y 軸上にあり,

$$g(t) = \frac{1+\sqrt{1-t^2}}{t} \text{ について}$$

$$g'(t) = -\frac{\sqrt{1-t^2}+1}{t^2\sqrt{1-t^2}} < 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} g(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 1-0} g(t) = 1$$

より $\log$ の単調性とで、点 Q の軌跡は

y 軸の $y > 0$ の部分 $\dots(\text{答})$



[V]

(1) 線分ABを直径とする円を C_1 とする。この円周上(2点A, Bは除く)に点Pを取ると、常に

$$\angle APB = \frac{\pi}{2}$$

を満たす。また点Pを円 C_1 の内部にとると、

$$\angle APB > \frac{\pi}{2}$$

となるから、図形 F は円 C_1 の周および内部を含む。

また、点Pを円 C_1 の外部にとると、

$$\angle APB < \frac{\pi}{2}$$

となる。

さて、点Pが領域 $y > 0$ に含まれる場合を考える。

円 C_1 上の点Q(0,1)をとり、点Qを中心とし、

2点A, Bを通る円 C_Q を考え、その円周上に点Pを取ると、常に

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle AQB = \frac{\pi}{4}$$

を満たす。点Pを円 C_Q の内部にとると、

$$\angle APB > \frac{\pi}{4}$$

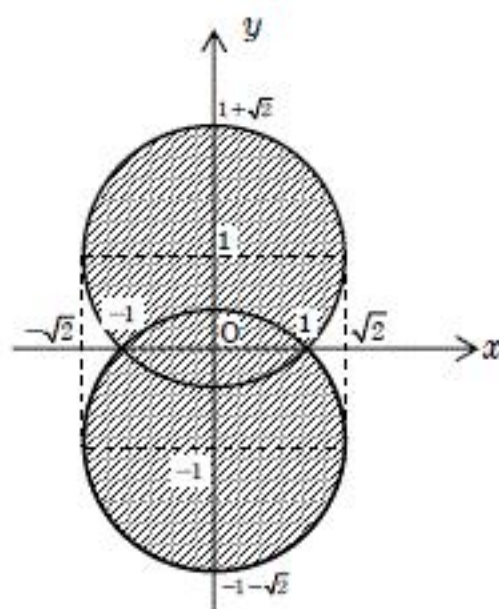
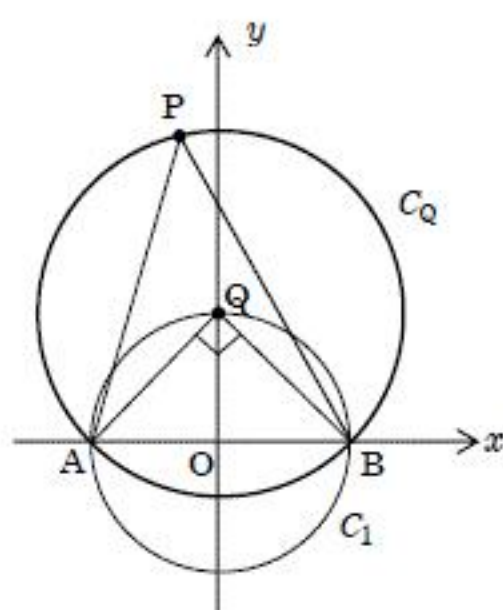
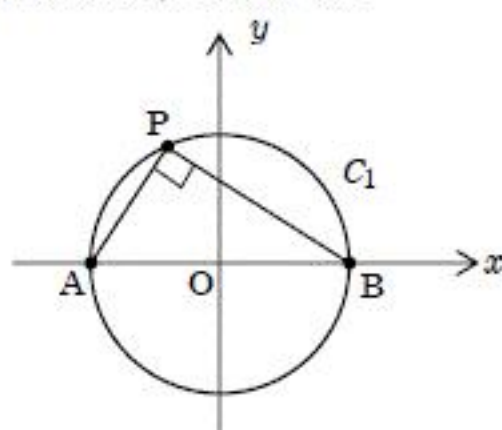
また点Pを円 C_Q の外部にとると、

$$\angle APB < \frac{\pi}{4}$$

となるので、条件を満たす点Pは、円 C_Q の周および内部に存在する。 x 軸に関する対称性により、点Pの存在範囲 F は、2つの円板

$$x^2 + (y-1)^2 \leq 2, \quad x^2 + (y+1)^2 \leq 2$$

の和集合となる。(2点A, Bを含む) …(答)



(2) 求める立体の体積は、

$$2 \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \pi (1 + \sqrt{2-x^2})^2 dx - \int_1^{\sqrt{2}} \pi (1 - \sqrt{2-x^2})^2 dx \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} (3 - x^2 + 2\sqrt{2-x^2}) dx - \int_1^{\sqrt{2}} (3 - x^2 - 2\sqrt{2-x^2}) dx \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \left[3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} + 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx - \left[3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^{\sqrt{2}} + 2 \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ 3\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + 2 \cdot \pi (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{4} - \left(3\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} - \left(3 - \frac{1}{3} \right) \right) + 2 \cdot \left(\pi (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) \right\}$$

$$= 3\pi^2 + \frac{10}{3}\pi \quad \dots(\text{答})$$

※(1)は次のように内積計算から考えることも出来る。 $P \neq A, B$ のとき、

$P(x, y)$ とおくと、 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ のとき

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より、

$$-1 \leq \frac{x^2 + y^2 - 1}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} \sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{または} \quad (x^2 + y^2 \geq 1 \text{かつ} (x^2 + y^2 - 2y - 1)(x^2 + y^2 + 2y - 1) \leq 0)$$