

2012年度
数 学
(問 題)

〈H2406BY16〉

注 意 事 項

1. 試験開始の指示があるまで、問題冊子および記述解答用紙を開かないこと。
2. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 記述解答用紙の所定の欄（2か所）に、氏名および受験票に記載されている受験番号を正確に記入すること。受験番号は、右詰めで記入し、番号欄に余白が生じる場合でも、番号の前に「0」を記入しないこと。

(例) 3825番 ⇒

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

※数字は読みやすいように、はっきり記入すること。

読みにくい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので、注意すること。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

4. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
5. 記述解答用紙の裏面に解答を記入しないこと。但し、計算用紙として使用してもよい。

1

ア

エ

にあてはまる数または式を解答用紙の所定欄に記入せよ.

(1) 次の等式

$$\log_3 x - \frac{1}{\log_9 x} = (-1)^x$$

を満たす正の整数 x の値は ア である.

(2) 定数関数でない関数 $f(x)$ が

$$f(x) = x^2 - \int_0^1 (f(t) + x)^2 dt$$

を満たすとき, $f(x) =$ イ $$ である.

(3) $0^\circ < \theta \leq 180^\circ$ とする. 数列 $\{a_n\}$ を次で定める.

$$a_1 = \cos \theta, \quad a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$$

このとき, $a_4 = a_5$ となる $\cos \theta$ の最大値は ウ である.

(4) 体積が 1 の正四面体の各辺の中点を頂点とする正八面体の体積は エ である.

2

座標平面上に4点 $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(2, 1)$, $C(0, 1)$ がある.

実数 a に対して4点 $P(a+1, a)$, $Q(a, a+1)$, $R(a-1, a)$, $S(a, a-1)$ をとる.
このとき、次の設問に答えよ.

- (1) 長方形 $OABC$ と 正方形 $PQRS$ が共有点を持つような a の範囲を求めよ.
- (2) 長方形 $OABC$ と 正方形 $PQRS$ の共通部分の面積が最大となる a の値と、そのときの共通部分の面積を求めよ.

3

平面上に点 $O, A_1, A_2, A_3, \dots, A_{100}$ がある. ただし、同じ点があってもよい. また、平面上の点 P に対して、

$$f(P) = \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{PA_i}|^2$$

とする. また、 $f(P)$ の最小値を m とし、平面上の点 C は $f(C) = m$ を満たすとする.
このとき、次の設問に答えよ.

- (1) $\vec{a_i} = \overrightarrow{OA_i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, 100$) とするとき、 $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a_i}$ を用いて表せ.

- (2) 次の条件

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{100} (\sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_i A_j}|^2) = \sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_1 A_j}|^2 + \sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_2 A_j}|^2 + \dots + \sum_{j=1}^{100} |\overrightarrow{A_{100} A_j}|^2 = 4000$$

が成立しているときの m の値を求めよ.

- (3) (2) における条件 (*) が成立しているとき、集合

$$\{A_i \mid |\overrightarrow{CA_i}| \geq 2, 1 \leq i \leq 100, i \text{ は整数}\}$$

の要素の個数の最大値を求めよ.

[以 下 余 白]

