

数 学

(問 題)

2012年度

〈2012 H24063620〉

注 意 事 項

1. 問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～9ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁およびマーク解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべてマーク解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルでマークすること。
4. 氏名は、試験開始後、マーク解答用紙の所定欄に、正しくていねいに記入すること。
5. 問1から問6までの ア , イ , ウ , …にはそれぞれ、 $-49, -48, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 48, 49$ のいずれかの数が当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙のア、イ、ウ、…で示された欄にマークして答えること。

例. アに3, イに-5, ウに30, エに-24, オに0と答えたいとき。

	－	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. マーク欄ははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようによく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☐ 悪い	☐ 悪い

7. いかなる場合でも、マーク解答用紙は必ず提出すること。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問1.

p, q を1でない自然数とする。このとき,

$$2(1 - \log_2 10) \log_5 p + \log_2 \frac{2012}{q} = 0$$

を満たす p の値は ア である。

問 2.

赤球と白球をあわせて 12 個の球が入っている袋がある。この袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき、それらが同じ色である確率は $\frac{31}{66}$ である。袋には白球⁵よりも赤球⁷が多く入っている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 袋に赤球は イ 個入っている。

(2) この袋から同時に 3 個の球を取り出すとき、赤球が少なくとも 1 個含まれる確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。ただし、

エ はできるだけ小さい自然数で答えることとする。

問3.

四面体 OABC において、 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{OB}$ はいずれも $\overrightarrow{OA}$ に直交し、 $\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角は 60 度であり、

$$AC = OB = 2, \quad OA = 3$$

である。このとき、三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ であり、四面体 OABC の体積は $\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

ただし、 $\boxed{\text{カ}}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする。

問 4.

1 と 2 を用いて n 桁の自然数を作る. このような n 桁の自然数のうち, 3 の倍数となる数の個数を a_n , そうでない数の個数を b_n とする.

$$a_1 = \boxed{\text{ク}}, \quad b_1 = \boxed{\text{ケ}}$$

である. また,

$$a_n + b_n = \boxed{\text{コ}}^n$$

であり, さらに, 実数 p, q, r, s を用いて,

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n \end{cases}$$

と表すことができる.

$$p = \boxed{\text{サ}}, \quad q = \boxed{\text{シ}}$$

である. ここで, $c_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくと,

$$c_{n+1} = \frac{\boxed{\text{ス}}}{2} c_n + \frac{\boxed{\text{セ}}}{2}, \quad c_1 = \boxed{\text{ソ}}$$

となる. よって,

$$a_n = \frac{\boxed{\text{タ}}}{3} \left(\boxed{\text{チ}} \right)^n + \frac{\boxed{\text{ツ}}}{3}$$

である.

問5.

k を実数とする. 3 次関数

$$f(x) = -x^3 + kx^2 + kx + 1$$

が $x = \alpha$ で極小値をとり, $x = \beta$ で極大値をとる. 3 点 $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$, $C(\beta, f(\alpha))$ が $AC = BC$ を満たすとき,

$$\alpha + \beta = \frac{\boxed{\text{テ}}}{3}k, \quad \alpha\beta = \frac{\boxed{\text{ト}}}{3}k$$

である. したがって,

$$k = \frac{\boxed{\text{ナ}} \pm \boxed{\text{ニ}} \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{2}$$

となる. ただし, $\boxed{\text{ニ}}$ は自然数, $\boxed{\text{ヌ}}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする.

問6.

$0 \leq x \leq 1$ において, 連立不等式

$$\begin{cases} 1 - 2x \leq f(x) \\ x \leq f(x) \\ f(x) \leq 1 \end{cases}$$

を満たす 2 次関数 $f(x)$ で, 定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ の値を最小にする関数は,

$$f(x) = \boxed{\text{ネ}} x^2 + \boxed{\text{ノ}} x + \boxed{\text{ハ}}$$

であり, その最小値は $\frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}$ となる. ただし, $\boxed{\text{フ}}$ はできるだけ小さい自然数で答えることとする.

[以 下 余 白]

