

問 1

- (1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ より, $3x^2 + 2ax + b = 0 \dots \textcircled{1}$
 が異なる 2 実解をもてばよい.

$$D/4 = a^2 - 3b > 0 \quad \therefore b < \frac{1}{3}a^2 \dots \textcircled{2} \quad (\text{答})$$

- (2) ②の下で, ①の異なる 2 実解が, $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$)
 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{2}{3}a \\ \alpha\beta = \frac{b}{3} \end{cases} \quad (\text{答})$$

- (3)

$$\begin{cases} f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{a}{9}\right) + \frac{2}{9}(3b - a^2)\alpha - \frac{ab}{9} \\ f(\beta) = f'(\beta) \cdot \left(\frac{1}{3}\beta + \frac{a}{9}\right) + \frac{2}{9}(3b - a^2)\beta - \frac{ab}{9} \end{cases}$$

であり, $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ より,

$$f(\alpha) + f(\beta) = \frac{2}{9}(3b - a^2)(\alpha + \beta) - \frac{2ab}{9}$$

$$= -\frac{4a}{27}(3b - a^2) - \frac{2ab}{9}$$

$$= -\frac{4a}{27}\left(\frac{9}{2}b - a^2\right) \quad (\text{答})$$

$$\alpha + \beta = -\frac{2}{3}a \text{ より}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3}x + \frac{a}{9} \\ 3x^2 + 2ax + b \overline{) x^3 + ax^2 + bx} \\ \underline{x^3 + \frac{2a}{3}x^2 + \frac{b}{3}x} \\ \frac{a}{3}x^2 + \frac{2b}{3}x \\ \underline{\frac{a}{3}x^2 + \frac{2a^2}{9}x + \frac{ab}{9}} \\ \frac{2}{9}(3a - a^2)x - \frac{ab}{9} \end{array}$$

- (4) (3)の結果を用いて, $f(\alpha) + f(\beta) = 0$

$$\iff a = 0 \quad \text{または} \quad b = \frac{2}{9}a^2 \quad (a \neq 0 \text{ で } \textcircled{2} \text{ を満たす})$$

$$\therefore a = 0, b < 0 \quad \text{または} \quad a \neq 0, b = \frac{2}{9}a^2 \quad (\text{答})$$

問2

$$\begin{aligned}
 (1) \quad S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{n}{2n+1} \qquad \therefore S_n = \frac{n}{2n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

ここで,

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n}{2n+1} - \frac{n-1}{2n-1} = \frac{1}{(2n+1)(2n-1)} = a_n \quad (n=2, 3, \dots) \cdots \textcircled{1}$$

次に,

$$\begin{aligned}
 (1-2S_{n-1})(1-2S_n) &= \left(1 - \frac{2(n-1)}{2n-1} \right) \left(1 - \frac{2n}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2n+1} \\
 &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n=2, 3, \dots) \cdots \textcircled{2}
 \end{aligned}$$

①, ②より, $S_n - S_{n-1} = (1-2S_{n-1})(1-2S_n)$ ($n=2, 3, \dots$) は成立し, 題意は示された. (証明終)

$$\begin{aligned}
 (2) \quad T_n - T_{n-1} &= (1-2T_{n-1})(1-2T_n) \\
 &\quad \swarrow U_n = 1-2T_n \left(T_n = \frac{1-U_n}{2} \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1-U_n}{2} - \frac{1-U_{n-1}}{2} &= U_{n-1} \cdot U_n \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(U_{n-1} - U_n) &= U_{n-1} - U_n \\
 &\quad \swarrow T_n + \frac{1}{2} \text{ より, } U_n \neq 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n-1}} &= 2 \\
 \therefore \boxed{(f)} \cdots \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_{n-1}} &= 2 \quad (n=2, 3, \dots) \quad (\text{答})
 \end{aligned}$$

数列 $\left\{ \frac{1}{U_n} \right\}$ は初項 $\frac{1}{U_1} = c$ ($\neq 0$), 公差 2 の等差数列より,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{U_n} &= c + (n-1) \cdot 2 \\
 &= 2n + c - 2
 \end{aligned}$$

$$\therefore U_n = \frac{1}{2n+c-2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \boxed{(g)} \cdots \frac{1}{2n+c-2} \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (\text{答})$$

$$n=1 \text{ を代入して, } U_1 = \frac{1}{c} \text{ より, } \frac{1}{c} = 1 - 2T_1 \quad \therefore T_1 = \frac{c-1}{2c}$$

$$\text{ここで, } T_1 = b_1 \text{ より, } b_1 = \frac{c-1}{2c} \quad \therefore \boxed{(h)} \cdots \frac{c-1}{2c} \quad (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (n \geq 2) \quad b_n &= T_n - T_{n-1} \\
 &= (1-2T_{n-1})(1-2T_n) \\
 &= U_{n-1} \cdot U_n \\
 &= \frac{1}{2(n-1)+c-2} \cdot \frac{1}{2n+c-2} \\
 &= \frac{1}{(2n+c-4)(2n+c-2)}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{(i)} \cdots \frac{1}{(2n+c-4)(2n+c-2)} \quad (n=2, 3, \dots) \quad (\text{答})$$

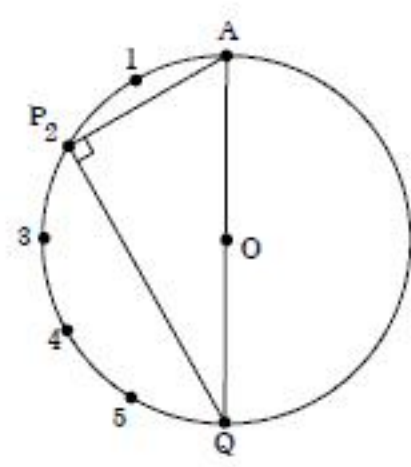
次に, $a_n = b_n$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+c-4)(2n+c-2)} \quad (n \geq 2), \quad \frac{1}{3} = \frac{c-1}{2c} \quad (n=1)$$

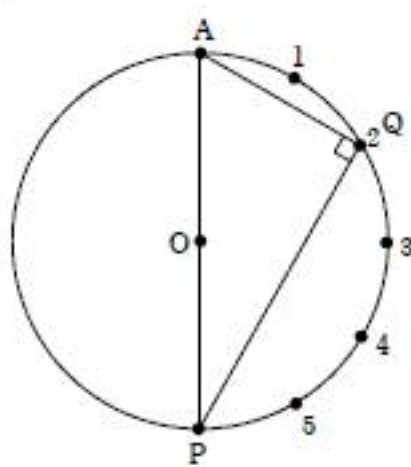
$$\text{これが全ての自然数 } n \text{ で成立するから, } c=3 \quad \therefore \boxed{(j)} \cdots 3 \quad (\text{答})$$

問 3

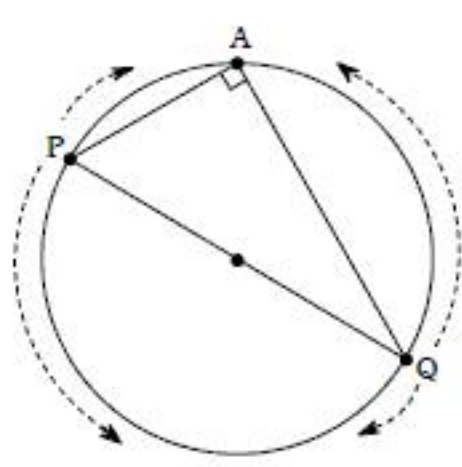
(1) 2点P,Qのとり方は ${}_{11}C_2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55$ 通り



Pのとり方は5通り
($\angle P = 90^\circ$)



Qのとり方は5通り
($\angle Q = 90^\circ$)

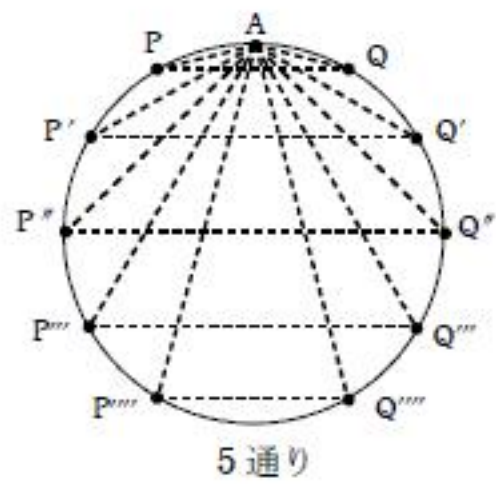


PQが直径となるとり方は5通り
($\angle A = 90^\circ$)

$5 + 5 + 5 = 15$ 通り

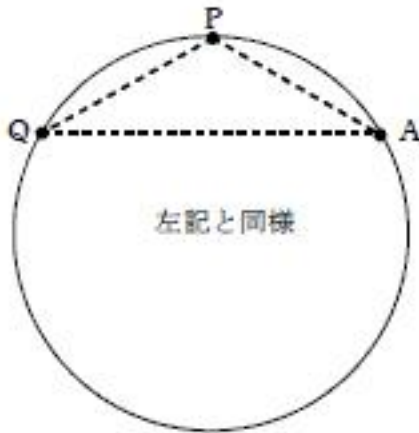
$\therefore P(\triangle APQ \text{ が直角三角形}) = \frac{15}{55} = \frac{3}{11}$ (答)

(2) (頂点Aのケース)



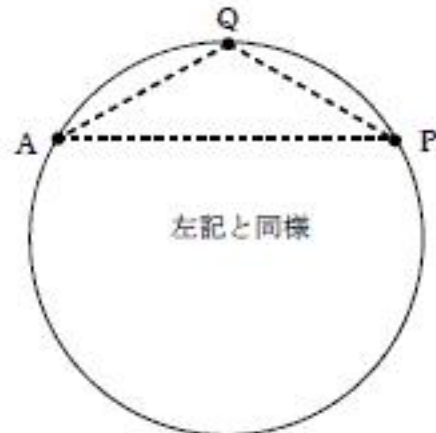
5通り

(頂点Pのケース)



4通り (重複する正三角形は除く)

(頂点Qのケース)



4通り

$\therefore P(\triangle APQ \text{ が二等辺三角形}) = \frac{5 + 4 + 4}{55} = \frac{13}{55}$ (答)

(3)

$\left. \begin{array}{l} \text{(点Oが}\triangle APQ\text{の辺上)} \cdots \cdots 15\text{通り} \\ \text{(点Oが}\triangle APQ\text{の内部)} \cdots \cdots 10\text{通り} \end{array} \right\} 25\text{通り}$

$\therefore P(\text{点Oが}\triangle APQ\text{の内部または周上}) = \frac{25}{55} = \frac{5}{11}$ (答)

問4

(1) $n = 2k - 1, 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) と表すと,

(i) $n = 2k - 1$ のとき

$$n^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4(k^2 - k) + 1 \quad \underline{\underline{(\text{余り}) = 1}}$$

(ii) $n = 2k$ のとき

$$n^2 = 4k^2 \quad \underline{\underline{(\text{余り}) = 0}}$$

以上(i)(ii)より, n^2 と 4 で割った余りは 0 または 1 (証明終)

(2) (1)を用いて,

$$\begin{cases} (\text{偶数})^2 \text{ は } 4 \text{ で割ると余り } 0 \\ (\text{奇数})^2 \text{ は } 4 \text{ で割ると余り } 1 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 = z^2$ (x, y, z : 自然数).....①とおいて,

x, y がともに奇数とすると, 自然数 M, N を用いて,

$x^2 + y^2 = (4M + 1) + (4N + 1) = 4(M + N) + 2 \neq z^2$ となり矛盾 (たとえ z が偶数または奇数であっても).

これにより, x と y はともに奇数となることはなく, 少なくとも一方は偶数. (証明終)

(3) ①より, x が偶数, y が奇数なら z も奇数となる.

そこで, $y = 2l - 1, z = 2m - 1$ (l, m : 自然数) とおく.

$$\begin{aligned} x^2 &= z^2 - y^2 \\ &= (2m - 1)^2 - (2l - 1)^2 \\ &= 4m^2 - 4m - 4l^2 + 4l \\ &= 4(m - l)(m + l - 1) \end{aligned}$$

一般的に 2 数の和と差の偶・奇は一致するから, $m - l$ と $m + l$ の偶・奇は一致, つまり, $m - l$ と $m + l - 1$ の偶・奇は異なり, その積は偶数となるので,

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(m - l)(m + l - 1) \\ &= 4 \cdot 2p \\ &= 8p \quad (p: \text{自然数}) \end{aligned}$$

とわかり, x が自然数であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} x &= 2\sqrt{2p} \\ &= 4g \quad (g: \text{自然数}) \end{aligned}$$

以上より, x は 4 の倍数である. (証明終)