$\boxed{1}$

(1) $x^3+ax+b$ が $(x+1)^2$ で割りきれるので

$$x^3+ax+b=(x+1)^2\underbrace{(x+c)}_{\text{商}}$$

と表せる.

$$x^3+ax+b=x^3+(2+c)x^2+(2c+1)x+c$$

より,

$$\therefore\ \underline{c=-2,\ a=-3,\ b=-2}$$

(2) 5 つの自然数 $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$

$$a_1=1,\ a_n+1\leqq a_{n+1}\leqq a_n+2$$

条件をみたす $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ に対し,

$$(a_1,a_2-1,a_3-2,a_4-3,a_5-4)=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$$

を対応させると,

$$b_5=a_5-4\leqq 9-4=5,$$
$$b_n\leqq b_{n+1}\leqq b_n+1$$

$b_5=5$ のとき $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ は　1 通り
$b_5=4$ のとき $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ は　4 通り
$b_5=3$ のとき $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ は　${}_4C_2=6$ 通り
$b_5=2$ のとき $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ は　4 通り
$b_5=1$ のとき $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$ は　1 通り

以上より, $\underline{16通り}$.

(3)

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

$$g(x)=\frac{3x}{2\sqrt{x^2+1}}+1,\ g'(x)=\frac{3\cdot 2\sqrt{x^2+1}-3x\left(2\sqrt{x^2+1}\right)'}{4(x^2+1)}$$

条件より,

$$\begin{cases} f'(1)=3a+2b+c=0 \\ f'(2)=12a+4b+c=0 \end{cases}\quad\cdots①$$

$(0,1)$ で $f(x)$ と $g(x)$ が接するので

$$\begin{cases} f(0)=g(0)=1 \quad \therefore\ d=1 \\ f'(0)=g'(0) \iff c=\dfrac{3}{2} \end{cases}\quad\cdots②$$

①, ②より

$$a=\frac{1}{4},\ b=-\frac{9}{8},\ c=\frac{3}{2},\ d=1$$

$$\underline{f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{8}x^2+\frac{3}{2}x+1}$$

(4)

1コ → 3コ …… $\frac{3}{10}$ …… A
1コ → 2コ …… $\frac{2}{5}$ …… B
1コ → 1コ …… $\frac{1}{5}$ …… C
1コ → 0コ …… $\frac{1}{10}$ …… D

とする.

| | 1年後 | 2年後 | |
|---|---|---|---|
| 1コ → | 1 → | 2 | …(i) |
| 1コ → | 2 → | 2 | …(ii) |
| 1コ → | 3 → | 2 | …(iii) |

(i) C → B なので $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{25}$

(ii)
・B → それぞれ C
・B → 一方が B, 他方が D

$$\frac{2}{5}\cdot\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2+2\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{10}\right)\right\}=\frac{6}{125}$$

(iii)
・A → 3コ中1コD, 2コC
・A → 3コ中2コD, 1コB

$$\frac{3}{10}\cdot\left\{3\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2\cdot\frac{2}{5}\right\}=\frac{9}{1250}$$

(i)～(iii)より, $\underline{\dfrac{169}{1250}}$

$\boxed{2}$

$$A=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad A^2=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(1)　$m$を整数として

(i)　$n=3m$のとき　$A^n=A^{3m}=\left(A^3\right)^m=E=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

(ii)　$n=3m+1$のとき　$A^n=A^{3m+1}=A=\underline{\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$

(iii)　$n=3m+2$のとき　$A^n=A^{3m+2}=A^2=\underline{\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}}$

(2)　$A\cdot A^2\cdot A^3\cdots A^n=A^{\frac{1}{2}n(n+1)}$

(i)　$n=6m$のとき　$A^{\frac{1}{2}n(n+1)}=A^{3m(6m+1)}=E=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

(ii)　$n=6m+1$のとき　$A^{\frac{1}{2}n(n+1)}=A^{(6m+1)(3m+1)}=A^{3(6m^2+3m)+1}=A=\underline{\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$

(iii)　$n=6m+2$のとき　$A^{\frac{1}{2}n(n+1)}=A^{(3m+1)(6m+3)}=A^{3(3m+1)(2m+1)}=E=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

(iv)　$n=6m+3$のとき　$A^{\frac{1}{2}n(n+1)}=A^{(6m+3)(3m+2)}=A^{3(6m^2+7m+2)}=E=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

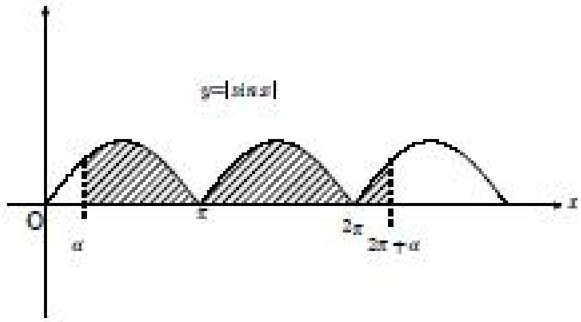
(v)　$n=6m+4$のとき　$A^{\frac{1}{2}n(n+1)}=A^{(3m+2)(6m+5)}=A^{3(6m^2+9m+3)+1}=A=\underline{\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$

(vi)　$n=6m+5$のとき　$A^{\frac{1}{2}n(n+1)}=A^{(6m+5)(3m+3)}=A^{3(m+1)(6m+5)}=E=\underline{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}$

$\boxed{3}$ $a>0,\ b>0$

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|a\sin x+b\cos x\right|dx$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}\left|\sin(x+\alpha)\right|dx \quad \left(\begin{array}{l}\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}\right)$$




$$=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(2\cdot\int_0^{\pi}\sin t\,dt\right)$$

$$=\underline{4\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\underbrace{\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}\left(\log\frac{k}{n}\right)\left|a\sin nx+b\cos nx\right|dt}_{I_n}$$

$I_n$ において $t=nx$ とすると, $\dfrac{dt}{dn}=n$ $\quad\therefore\ dx=\dfrac{dt}{n}$

$$I_n=\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\left(\log\frac{k}{n}\right)\left|a\sin t+b\cos t\right|\frac{dt}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{k}{n}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\left(\log\frac{k}{n}\right)\left|a\sin t+b\cos t\right|\frac{dt}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\log\frac{k}{n}\cdot4\sqrt{a^2+b^2}\quad(\because\ (1))$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}I_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{n}\log\frac{k}{n}\cdot4\sqrt{a^2+b^2}$$

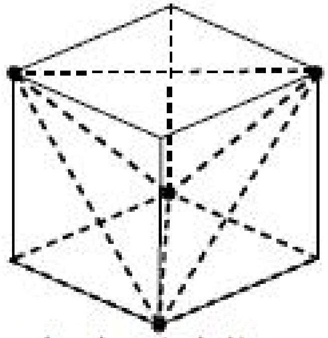
$$=4\sqrt{a^2+b^2}\int_1^2\log x\,dx$$

$$=4\sqrt{a^2+b^2}\left[x\log x-x\right]_1^2$$

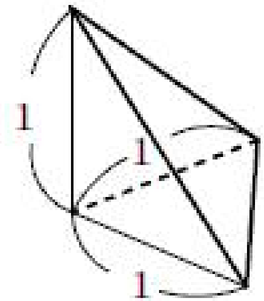
$$=\underline{4\sqrt{a^2+b^2}\log\frac{4}{e}}$$

$\boxed{4}$

(1)



1辺1の立方体




立体$A$

立方体より，立体 $A$ を 4 つ除けば正 4 面体になる．

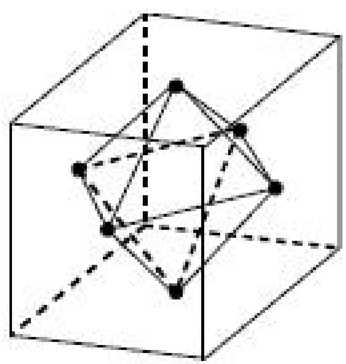
立体 $A$ の体積は

$$V_A=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$$

よって，正 4 面体 の体積は

$$\left(1-4\cdot\frac{1}{6}\right)=\underline{\frac{1}{3}}$$

(2)



2 つの正 4 面体の共通部分は，左図のように立方体に各面の中心を頂点とする 8 面体になる．

よって，共通部分の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\underline{\frac{1}{6}}$$