1

(1)　(n−1 群までの項数)$=1+3+5+\cdots+(2n-3)$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$

$$=2\cdot\frac{(n-1)n}{2}-(n-1)$$

$$=n^2-2n+1\quad\text{(項)}$$

∴　(第 n 群の初項) $=a_{n^2-2n+2}=2(n^2-2n+2)-1$

$$=2n^2-4n+3\qquad\text{(答)}$$

(2)　(第 n 群の中央の項)＝(第 n 群の第 n 項)

$$=(2n^2-4n+3)+(n-1)\cdot 2$$

$$=2n^2-2n+1\qquad\text{(答)}$$

(3)　$S(n)=\dfrac{2n-1}{2}\left\{2(2n^2-4n+3)+(2n-1-1)\cdot 2\right\}$

$$=(2n-1)(2n^2-2n+1)\qquad\text{(答)}$$

(4)　(中央の項の総和)$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$

$$=2\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)-2\cdot\frac{n}{2}(n+1)+n$$

$$=\frac{n}{3}(2n^2+1)\qquad\text{(答)}$$

(5)　2013 が第 l 群に存在するとする．

$$2l^2-4l+3\leqq 2013<2(l+1)^2-4(l+1)+3$$

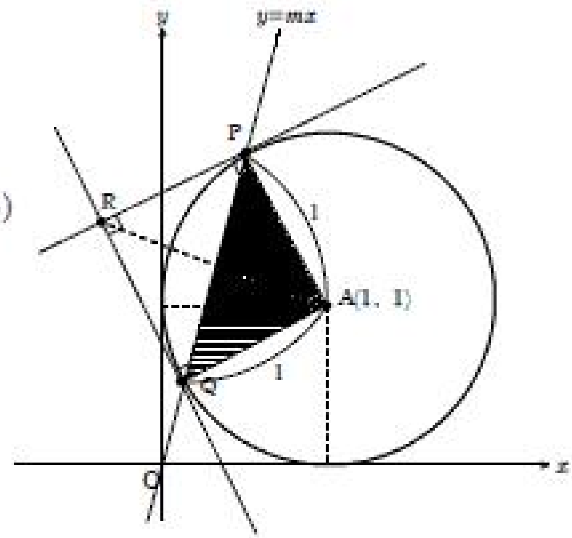
$l=32$ のとき　$1923\leqq 2013<2049$ となり成立（l は一意的に決定）

さらに，　$\dfrac{2013-1923}{2}+1=\dfrac{90}{2}+1=46$

∴　2013 は第 32 群の 46 項　(答)

2

(1) $S=\triangle \mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\dfrac{1}{2}$ （答）



(2) 直線lを$y=mx$ $(mx-y=0)$とおく．（y軸平行ではない）

A$(1,1)$からlまでの距離は$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\iff \sqrt{2}\,|m-1|=\sqrt{m^2+1}$$

$$\therefore\ 2(m^2-2m+1)=m^2+1$$

$$\iff m^2-4m+1=0\ \therefore\ m=2\pm\sqrt{3}$$ （答）

(3) 右図の点Rを求める．

$$(\text{AR の傾き})=-\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\sqrt{3}-2$$

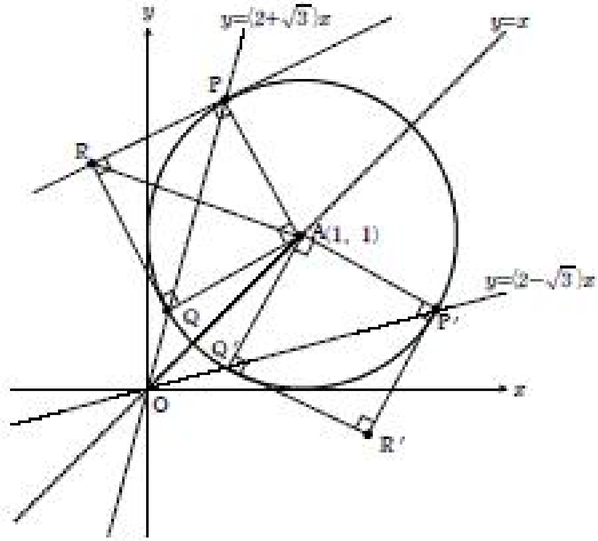
ここで，$\overrightarrow{p}=(-1,\,2-\sqrt{3})$に対し，

$$\left|\overrightarrow{p}\right|=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1,\,1)+\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(-1,\,2-\sqrt{3}\right)$$

$$=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{R}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$



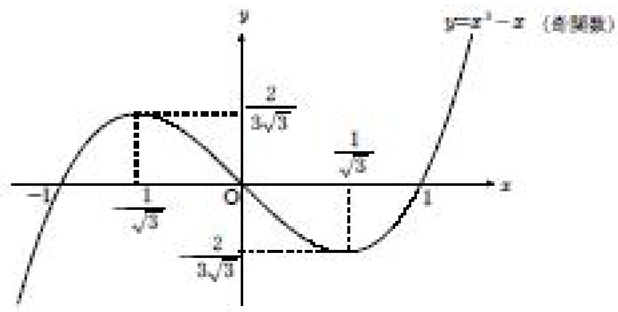
さらに，点Rと点R′は$y=x$対称より，R′$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

以上より，交点Rは$\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{2},\,\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ （答）

3

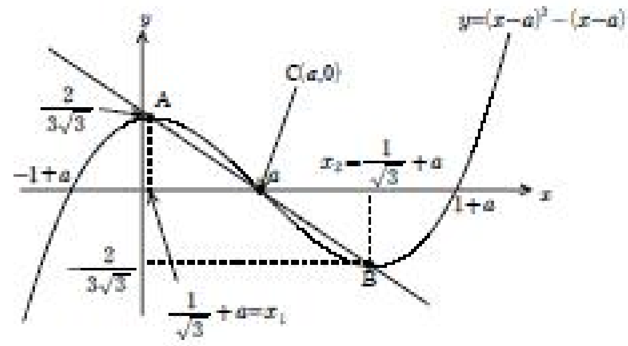
(1)　①: $y=x^3-x$　について，$y'=3x^2-1$

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$



②: $y=(x-a)^3-(x-a)$ は①を x 軸方向に a だけ平行移動

$$\mathrm{A}\left(\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{3}}+a}_{x_1},\ \frac{2}{3\sqrt{3}}\right),\ \mathrm{B}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}+a}_{x_2},\ -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$



さらに $\mathrm{C}(a,\ 0)$ とおく．

点Cは2点A, Bの中点であり，直線ABは点Cを通るから

$$(2\text{点A, Bを結ぶ直線の傾き})=(2\text{点A, Cを結ぶ直線の傾き})=\frac{0-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}{a-\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+a\right)}=-\frac{2}{3}$$

$\therefore$　(直線ABの方程式)：$y=-\dfrac{2}{3}(x-a) \iff y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{3}a$　　(答)

(2)　$x^3-x=(x-a)^3-(x-a)$

$\iff 3ax^2-3a^2x+a^3-a=0$

$a>0$ より，辺々を a で割る

$\iff 3x^2-3ax+a^2-1=0$ …③

③が異なる2実解をもてばよい．$D=9a^2-12(a^2-1)>0$

$\iff 3a^2-12<0$

$\iff (a+2)(a-2)<0$　　$\therefore\ -2<a<2$

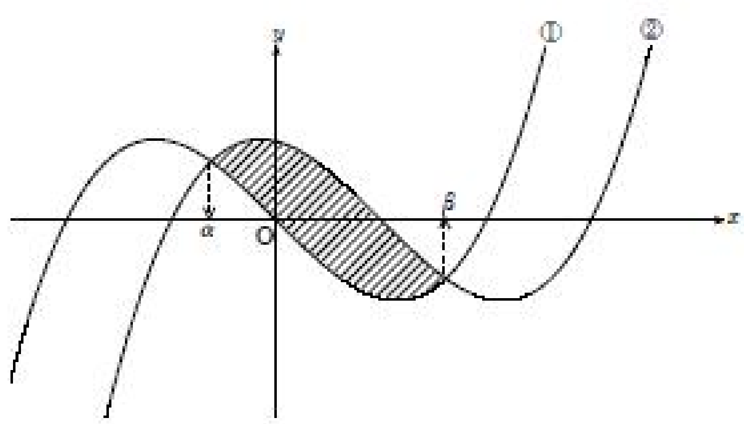
$a>0$ より，　$\therefore\ 0<a<2$　　(答)

(3)　$0<a<2$ のもとで，

$3x^2-3ax+a^2-1=0$ の異なる2実解が $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ だから

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha\beta=\dfrac{a^2-1}{3}\end{cases}\ \cdots④$$



ここで，$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

④より

$=a^2-4\cdot\dfrac{a^2-1}{3}$

$=\dfrac{4-a^2}{3}$　　$\therefore\ \beta-\alpha=\sqrt{\dfrac{4-a^2}{3}}$　$(0<a<2)$　　(答)

(4)

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-a)^3-(x-a)-x^3+x\}dx$$

$$=-3a\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{a}{2}(\alpha-\beta)^3$$

$$=\frac{a}{2}\cdot\frac{(4-a^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}}$$

$\therefore\ S=\dfrac{\sqrt{3}}{18}a(4-a^2)^{\frac{3}{2}}$　$(0<a<2)$　　(答)