

[1]

(1)

$$\begin{cases} y^2 = 4px \\ x = ay + p \end{cases}$$

より x を消去すると,

$$y^2 = 4p(ay + p)$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 4ap y - 4p^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

ここで①の2解が $y = y_1, y_2$ であるから,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 4ap \\ y_1 y_2 = -4p^2 \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 条件より,

$$\begin{cases} x_1 = ay_1 + p \\ x_2 = ay_2 + p \end{cases}$$

を満たす。よって,

$$\begin{aligned} P_1 P_2^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= \{a(y_1 - y_2)\}^2 + (y_1 - y_2)^2 \\ &= (a^2 + 1) \{ (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 \} \\ &= (a^2 + 1) \{ (4ap)^2 - 4(-4p^2) \} \\ &= 16p^2 (a^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

から,

$$P_1 P_2 = 4p(a^2 + 1)$$

a を $-\frac{1}{a}$ とすることで,

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= 4p \left\{ \left(-\frac{1}{a} \right)^2 + 1 \right\} \\ &= \frac{4p(a^2 + 1)}{a^2} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_1 P_2} + \frac{1}{Q_1 Q_2} &= \frac{1}{4p(a^2 + 1)} + \frac{a^2}{4p(a^2 + 1)} \\ &= \frac{a^2 + 1}{4p(a^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{4p} \quad (\text{一定}) \quad \cdots \text{証明終わり} \end{aligned}$$

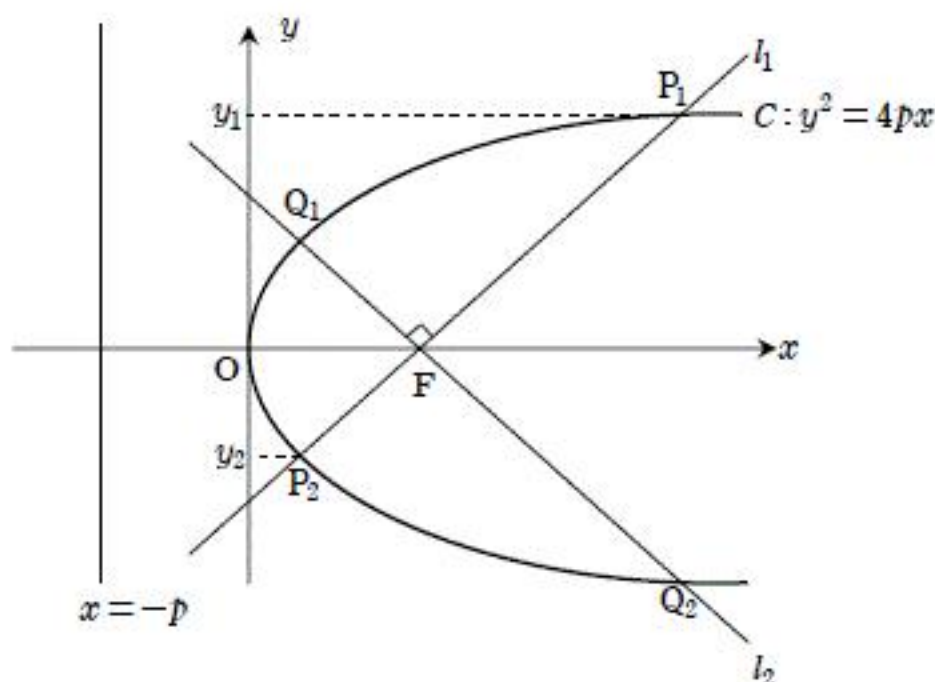
※二次曲線としての放物線の性質より,

$$FP_1 = x_1 + p, \quad FP_2 = x_2 + p$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} P_1 P_2 &= x_1 + x_2 + 2p \\ &= (ay_1 + p) + (ay_2 + p) + 2p \\ &= a(y_1 + y_2) + 4p \\ &= 4p(a^2 + 1) \end{aligned}$$

という計算も可能。



〔Ⅱ〕

$$(1) \quad a_n^2 + b_n^2 = 5^{2n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が $n \geq 1$ で成立することを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$ のとき,

$$z^1 = a_1 + b_1 i = 1 + 2\sqrt{6}i$$

より, a_1, b_1 が実数であることとて,

$$a_1 = 1, \quad b_1 = 2\sqrt{6}$$

となるから,

$$a_1^2 + b_1^2 = 1^2 + (2\sqrt{6})^2 = 25 = 5^{2 \cdot 1}$$

より $\textcircled{1}$ は $n=1$ で成立する。

(ii) $n=k (k \geq 1)$ のとき, $\textcircled{1}$, つまり,

$$a_k^2 + b_k^2 = 5^{2k} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立すると仮定する。すると,

$$z^{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}i$$

であり,

$$z^{k+1} = z \cdot z^k$$

$$= (1 + 2\sqrt{6}i)(a_k + b_k i)$$

$$= a_k - 2\sqrt{6}b_k + (b_k + 2\sqrt{6}a_k)i$$

から, $a_{k+1}, b_{k+1}, a_k - 2\sqrt{6}b_k, b_k + 2\sqrt{6}a_k$ が実数であることとて,

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k - 2\sqrt{6}b_k & \cdots \textcircled{3} \\ b_{k+1} = b_k + 2\sqrt{6}a_k & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

を満たす。よって,

$$\begin{aligned} a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2 &= (a_k - 2\sqrt{6}b_k)^2 + (b_k + 2\sqrt{6}a_k)^2 \\ &= 25a_k^2 + 25b_k^2 \\ &= 5^2 \cdot 5^{2k} \quad (\textcircled{2} \text{より}) \\ &= 5^{2(k+1)} \end{aligned}$$

から $\textcircled{1}$ は $n=k+1$ でも成立する。以上より題意は示せた。 $\cdots$ 証明終わり

(2) $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ より $k=n$ とし, b_n, b_{n+1} を消去することで,

$$\frac{a_{n+1} - a_{n+2}}{2\sqrt{6}} = \frac{a_n - a_{n+1}}{2\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}a_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} - 25a_n \quad \cdots \textcircled{5}$$

よって, $p=2, q=-25$ $\cdots$ 答

(3)

$a_1=1, a_2=-23$ と $\textcircled{5}$ とで帰納的に $\{a_n\}$ は整数である。

ここで, $\langle x \rangle$ で x を 5 で割ったときの余りを表すとする。

$$\langle a_1 \rangle = \langle 1 \rangle = 1$$

であり, $\textcircled{5}$ から,

$$\begin{aligned} \langle a_{n+2} \rangle &= \langle 2a_{n+1} - 25a_n \rangle \\ &= \langle 2a_{n+1} \rangle \end{aligned}$$

を満たすから,

$$\langle a_n \rangle = \langle 2^{n-1} \rangle$$

と表せる。

$$\langle 2^{n-1} \rangle \neq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

だから a_n は 5 の倍数ではない。 $\cdots$ 証明終わり

(4) $\textcircled{1}$ から,

$$b_n^2 = 5^{2n} - a_n^2$$

ここで, 右辺は整数であり, b_n^2 も整数。また(3)の結果より,

$$\langle a_n \rangle \neq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

なので, $\langle a_n^2 \rangle \neq 0$ であるので,

$$\langle b_n^2 \rangle = \langle 5^{2n} - a_n^2 \rangle = \langle 0 - a_n^2 \rangle \neq 0$$

よって,

$$b_n \neq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

だから $z^n (n=1, 2, 3, \dots)$ は実数ではない。 $\cdots$ 証明終わり

〔Ⅲ〕

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$$

について,

$$(1) \quad g(x) = tx - f(x) = (t-1)x - \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x$$

より,

$$g'(x) = t-1 - e^{2x} - 2e^x = t - (e^x + 1)^2$$

ここで $e^x = u$ とおくと $u > 0$ であり,

$$g'(x) = -(u+1)^2 + t$$

これは u の 2 次関数であり, $u > 0$ において減少関数である。

関数 $g(x)$ が最大値を持つための条件は, $g(x)$ が,

極大値を持つことと同値であり, その条件は,

$$g'(0) > 0$$

$$\Leftrightarrow t > 1 \quad \cdots \text{答}$$

このとき,

$$g'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x + 1)^2 = t$$

$$\Leftrightarrow e^x + 1 = \pm \sqrt{t}$$

$e^x > 0$ だから,

$$e^x = \sqrt{t} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \log(\sqrt{t} - 1) \quad \cdots \text{答}$$

最大値は,

$$g(\log(\sqrt{t} - 1))$$

$$= (t-1)\log(\sqrt{t}-1) - \frac{1}{2}(\sqrt{t}-1)^2 - 2(\sqrt{t}-1)$$

$$= (t-1)\log(\sqrt{t}-1) - \frac{1}{2}t - \sqrt{t} + \frac{3}{2} \quad \cdots \text{答}$$

$$(2) \quad m(t) = (t-1)\log(\sqrt{t}-1) - \frac{1}{2}t - \sqrt{t} + \frac{3}{2}$$

$$h(t) = at - m(t)$$

$$= \left(a + \frac{1}{2}\right)t + \sqrt{t} - (t-1)\log(\sqrt{t}-1) - \frac{3}{2}$$

について,

$$h'(t) = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \log(\sqrt{t}-1) - (t-1)\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}-1}$$

$$= a - \log(\sqrt{t}-1) \quad (t \text{ の減少関数})$$

より,

$$h'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log(\sqrt{t}-1) = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} = e^a + 1$$

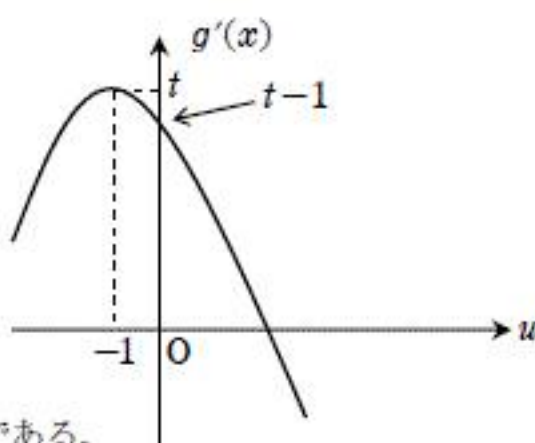
$$\Leftrightarrow t = (e^a + 1)^2$$

t	(1)	...	$(e^a + 1)^2$	...
$h'(t)$		+	0	-
$h(t)$		↗		↘

よって $h(t)$ は $t = (e^a + 1)^2$ で極大かつ最大となり, 最大値は,

$$h((e^a + 1)^2) = \left(a + \frac{1}{2}\right)(e^a + 1)^2 + e^a + 1 - \{(e^a + 1)^2 - 1\}a - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^{2a} + 2e^a + a \quad \cdots \text{答}$$



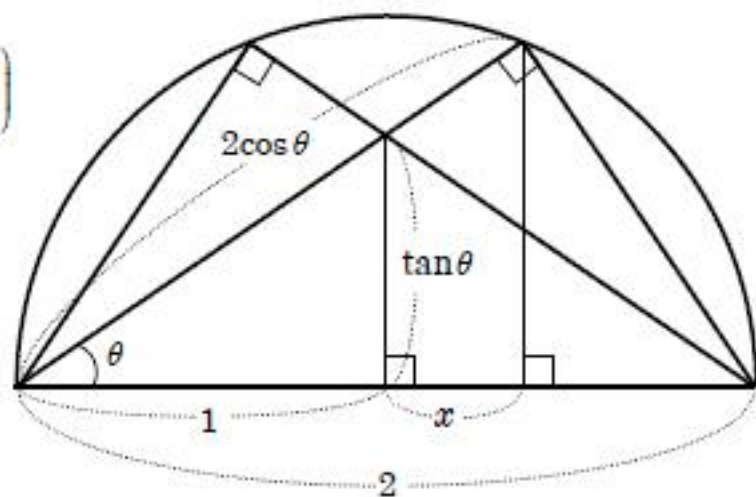
[IV]

(1) 図のように角 θ を設定すると,

$$2\cos\theta \cdot \cos\theta = 1+x \text{ より } \cos\theta = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \text{ だから, } \sin\theta = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$$

すると,

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\cos\theta \cdot \sin\theta - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan\theta \right) \\ &= 4\sin\theta\cos\theta - \tan\theta \\ &= 4\sqrt{\frac{1+x}{2}}\sqrt{\frac{1-x}{2}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \\ &= 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \quad \dots \text{答} \\ &\left(= \frac{1+2x}{1+x}\sqrt{1-x^2} \right) \end{aligned}$$



(2) R の体積を V とする。

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx - \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx \end{aligned}$$

について,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ は単位円の面積の } \frac{1}{4} \text{ で, } \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

である。また $x = \sin t$ とすると $\frac{dx}{dt} = \cos t$, $\begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline t & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{array}$ から,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\sin t}{1+\sin t}} \cos t dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin t) dt \\ &= [t + \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

以上より,

$$V = 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 1 \quad \dots \text{答}$$

[V]

(1) 右図において,

$$A'B' = l$$

として,

$$l^2 = \cos^2 \varphi + (\sin \varphi \cos \theta)^2$$

$$= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \theta)$$

$$= 1 - \sin^2 \varphi \sin^2 \theta$$

ここで $0 \leq \sin^2 \varphi \leq 1$ だから,

$$1 - 1 \cdot \sin^2 \theta \leq l^2 \leq 1 - 0 \cdot \sin^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta \leq l^2 \leq 1$$

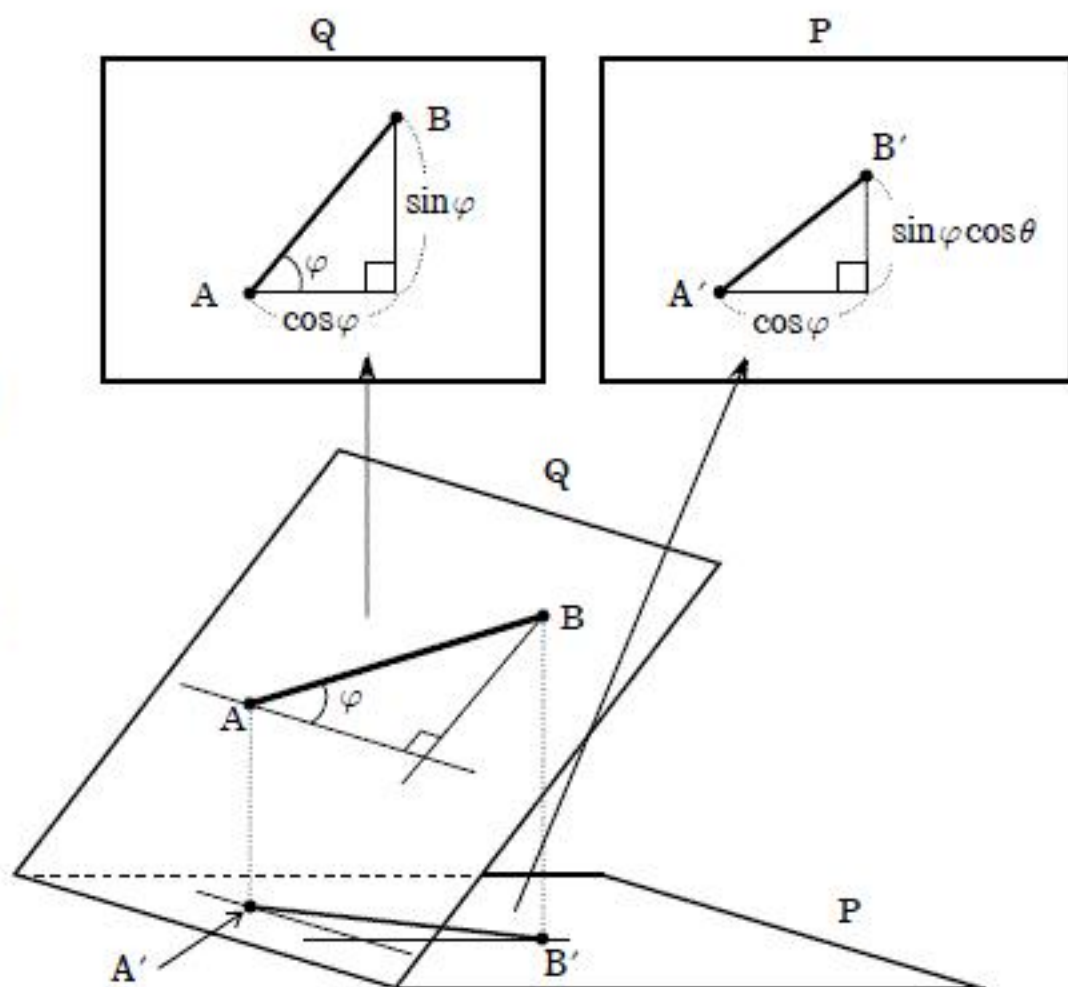
よって,

$$\cos \theta \leq l \leq 1$$

だから,

最大値は 1

最小値は $\cos \theta$ …答



(2) 平面 Q と平面 P の交線を m とする。平面 Q 上の正三角形について, m を軸として,

m に垂直な直線による正三角形の切り口(線分)の長さ(下図)を $f(t)$ (切り口の存在範囲を $a \leq t \leq b$ とする) とすると,

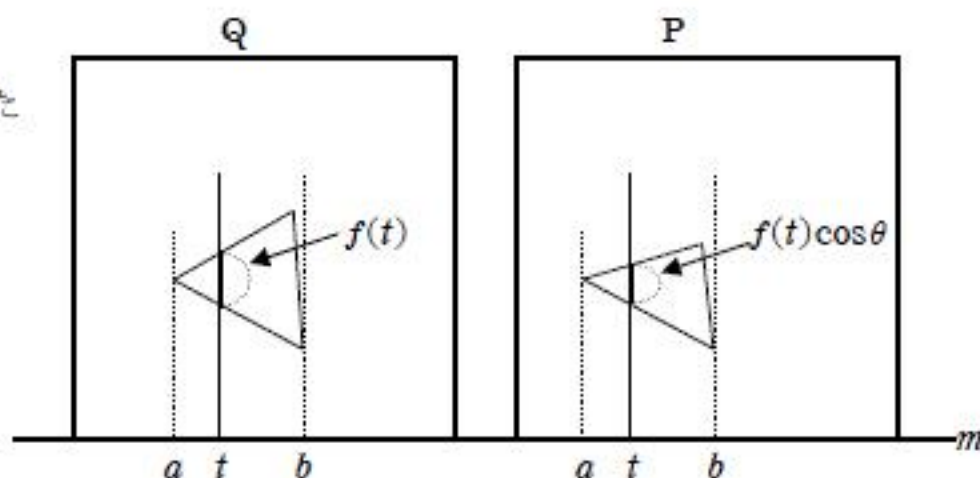
$$\int_a^b f(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

を満たす。また, 平面 P へ正射影された図形(三角形)の面積は,

$$\int_a^b f(t) \cos \theta dt$$

で与えられるから, 求める面積は,

$$\cos \theta \int_a^b f(t) dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \cos \theta \quad \text{…答}$$



(3) 正射影 T' の形は, 三角形または四角形である。 …答

次に T' の面積の最大値に関して,

(i) T' が三角形のとき,

その面積は(2)の結果より $\frac{\sqrt{3}}{4} \cos \psi$ と表せるので, これは

$\cos \psi = 1$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

(正四面体の 1 つの面が P に並行な場合)

(ii) T' が四角形のとき,

その面積は

$$\frac{1}{2} \cdot A'C' \cdot B'D' \cdot \sin \varphi$$

で与えられる。

$$A'C' \leq 1, B'D' \leq 1, \sin \varphi \leq 1$$

であるから,

$$\frac{1}{2} \cdot A'C' \cdot B'D' \cdot \sin \varphi \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

を満たす。右図のような場合に等号は成立し, 面積は

最大値 $\frac{1}{2}$ をとる。(AC, BD が共に平面 P に並行な場合)

$\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ だから, 以上より T' の面積の最大値は $\frac{1}{2}$ …答

