

数 学

(問 題)

2013年度

〈2013 H25070111〉

注 意 事 項

1. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は2, 4, 6ページに記載されている。その他のページは計算用として使ってよい。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 問1, 問2, 問3, 問4の全問を解答すること。
4. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。コンパス、定規は使用してもよい。
5. 受験番号および氏名は、試験がはじまってから、解答用紙の所定欄(2か所)に正確に記入すること。
受験番号の記入にあたっては、次の数字見本に従い、正確に正しいに記入すること。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

6. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

問1 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ が $x = \alpha$ で極大値, $x = \beta$ で極小値をとるとき, 次の各問に答えよ。
 答のみ解答欄に記入せよ。

(1) 極大値と極小値がともに存在するための条件を, a と b を用いて表せ。

(2) $\alpha + \beta$ を, a と b を用いて表せ。

(3) $f(\alpha) + f(\beta)$ を, a と b を用いて表せ。

(4) $f(\alpha) + f(\beta) = 0$ が成り立つための条件を, a と b を用いて表せ。

問2 次の各問に答えよ。(2) は空欄にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で与えられている。このとき, 和 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ を求めよ。また, S_n は

$$S_n - S_{n-1} = (1 - 2S_{n-1})(1 - 2S_n) \quad (n=2, 3, \dots)$$

を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の和 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ が

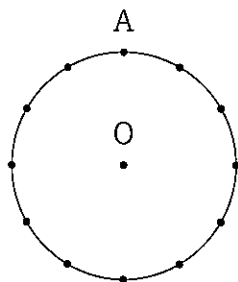
$$(*) \quad T_n - T_{n-1} = (1 - 2T_{n-1})(1 - 2T_n) \quad (n=2, 3, \dots)$$

を満たしている。もし, $T_1 = \frac{1}{2}$ ならば, $(*)$ で $n=2$ ととれば, $T_2 = T_1 = \frac{1}{2}$ となる。同様に, $(*)$ で $n=3, 4, \dots$ ととれば, $T_n = \frac{1}{2} \quad (n=3, 4, \dots)$ となる。

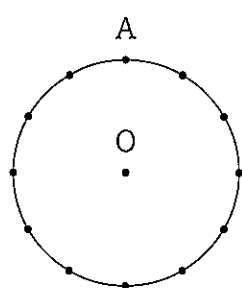
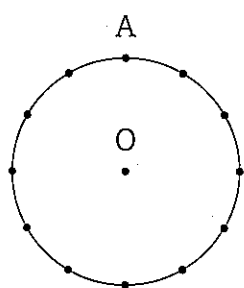
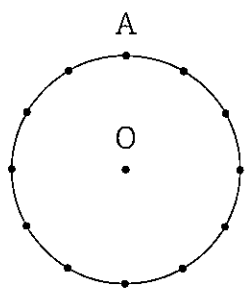
いま, $T_n \neq \frac{1}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とする。このとき, $U_n = 1 - 2T_n$ とおくと, U_n は漸化式 $\boxed{\text{(ア)}}$ を満たす。よって, $\frac{1}{U_1} = c \quad (c \neq 0)$ とおけば, U_n は n と c を用いて, $U_n = \boxed{\text{(イ)}}$

と表せる。これより, $b_1 = \boxed{\text{(ウ)}}$, $b_n = \boxed{\text{(エ)}}$ が得られ, b_n が (1) の a_n と一致するのは $c = \boxed{\text{(オ)}}$ のときである。

問3 図のように点Oを中心とする円の円周を12等分する12個の点を取り、そのうちの1つを点Aとする。さらに点P, Qを、3点A, P, Qが互いに異なるように選ぶ。ただし点A, P, Qはこの順に時計の針の回転と逆の向きに並ぶものとする。このとき、次の各問に答えよ。答のみ解答欄に記入せよ。



- (1) $\triangle APQ$ が直角三角形になる確率を求めよ。
- (2) $\triangle APQ$ が二等辺三角形になる確率を求めよ。
- (3) 点Oが $\triangle APQ$ の内部または周上にある確率を求めよ。



問4 自然数の組 (x, y, z) が等式 $x^2 + y^2 = z^2$ を満たすとする。

- (1) すべての自然数 n について、 n^2 を4で割ったときの余りは0か1のいずれかであることを示せ。
- (2) x と y の少なくとも一方が偶数であることを示せ。
- (3) x が偶数、 y が奇数であるとする。このとき、 x が4の倍数であることを示せ。

[以 下 余 白]