

数学 理系(B方式)

(問題)

2013年度

〈2013 H25071119〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、マーク解答用紙を配布する。問題冊子は、試験開始の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は4～8ページに記載されている。試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れ等に気付いた場合は、手を挙げて監督員に知らせること。
3. 解答はすべて解答用紙の所定欄にHBの黒鉛筆またはHBのシャープペンシルで記入すること。
4. マーク解答用紙については、受験番号を確認したうえ所定欄に氏名のみ記入すること。
5. 問1から問5までの「ア」, 「イ」, 「ウ」, …にはそれぞれ、 $-49, -48, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 48, 49$ のいずれかが当てはまる。次の例にならって、マーク解答用紙の「ア」, 「イ」, 「ウ」, …で示された欄にマークして答えること。

例. アに3, イに-5, ウに30, エに-24, オに0と答えたいとき。

	—	十 の 位				一 の 位									
		1	2	3	4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ア	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐
イ	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐
ウ	☐	☐	☐	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
エ	☒	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐
オ	☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

6. 分数形で解答する場合の分母、および根号の中の数値はできるだけ小さな自然数で答えること。
7. マークははっきり記入すること。また、訂正する場合は、消しゴムでていねいに、消し残しがないようよく消すこと（砂消しゴムは使用しないこと）。

マークする時	☒ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い
マークを消す時	☐ 良い	☒ 悪い	☐ 悪い

8. いかなる場合でも、解答用紙は必ず提出すること。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ること。

【問 1】

次の問に答えよ.

(1) 13^{13} を 144 で割ったときの余りは $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 空間内に 3 点 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 5, 2)$, $C(1, 2, 1)$ がある. 点 A , B を通る直線を l としたとき, 点 C との距離が最小となる l 上の点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}, \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{イ}}}, \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{イ}}} \right)$$

である.

【問2】

次のような群にわかれた数列がある.

$$(1), (2, 4), (5, 7, 9), (10, 12, 14, 16), \dots$$

(第2群の初項は第1群の末項に1を加えたものとし, 第3群の初項は第2群の末項に1を加えたものとする. 以下同様に第 n 群の初項は第 $n-1$ 群の末項に1を加えたものとする. 第 n 群は公差2, 項数 n の等差数列である.)

このとき次の問に答えよ.

(1) 第 n 群に含まれる項の総和は $\boxed{\text{カ}}n^3 + \boxed{\text{キ}}n^2 + \boxed{\text{ク}}n$ である.

(2) 第1群から第 n 群に含まれるすべての項の総和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}} (\boxed{\text{コ}}n^4 + \boxed{\text{サ}}n^3 + \boxed{\text{シ}}n^2 + \boxed{\text{ス}}n)$$

である.

【問 3】

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD において、図のように $AW = BX = CY = DZ$ となる点 W, X, Y, Z をとる. 四角形 WXYZ に内接する円を C_0 とし, $\triangle AWZ$, $\triangle BXW$, $\triangle CYX$, $\triangle DZY$ に内接する円をそれぞれ C_1, C_2, C_3, C_4 とする.

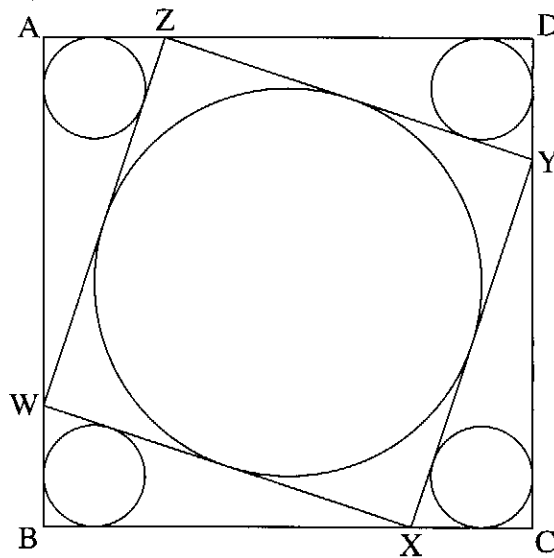
$AW = x$, $ZW = a$ とおくと

$$a^2 = \boxed{\text{セ}} x^2 + \boxed{\text{ソ}} x + 1 \quad (0 < x < 1)$$

となる. 円 C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 の面積の総和を S とすると

$$S = \frac{\pi}{4} (\boxed{\text{タ}} a^2 + \boxed{\text{チ}} a + \boxed{\text{ツ}})$$

となり, $a = \frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{テ}}}$ のとき, S は最小値 $\frac{\pi}{\boxed{\text{ナ}}}$ をとる.



【問 4】

直線 $x + y = 1$ に接する楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とする.

$$a^2 = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ニ}}}, \quad b^2 = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ニ}}} \text{ のとき, } V \text{ は最大値 } \frac{\boxed{\text{ハ}} \sqrt{3}\pi}{\boxed{\text{ノ}}} \text{ をとる.}$$

【問 5】

平面上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ に対して、点 $Q(x, y)$ を以下のように定める.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を動くとき、次の問に答えよ.

(1) すべての点 $Q(x, y)$ に対して、 $ax^2 + bxy + y^2$ の値が θ によらず一定であるとき、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ヒ}}$, $b = \boxed{\text{フ}}$ である.

(2) 原点 O と点 Q の距離の 2 乗の最小値は $\boxed{\text{ヘ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ホ}}$ である.

[以 下 余 白]