

数 学

問 題

2013年度

〈H25070017〉

注 意 事 項

1. この試験では、この問題冊子のほかに、解答用紙3種類（その1，その2，その3）を配付します。
2. 問題冊子および解答用紙は、試験開始の合図があるまで開かないでください。
3. 問題は4～5ページに記載されています。試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁，乱丁および解答用紙の汚れに気付いた場合は，手を挙げて監督員に知らせてください。
4. すべての解答用紙の所定の欄（各2か所）に，氏名および受験票に記載されている受験番号を，正確に記入してください。受験番号は，右詰めで記入し，番号欄に余白が生じる場合でも，番号の前に「0」を記入しないでください。

(例) 3825番 ⇨

万	千	百	十	一
	3	8	2	5

 ※数字は読みやすいように，はっきり記入してください。

読みにくい数字は採点処理に支障をきたすことがあるので，注意してください。

数 字 見 本	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

5. 解答はすべて解答用紙の所定欄に，黒鉛筆（HB）またはシャープペンシル（HB）で記入し，所定欄外には何も記入しないでください。
6. 下書きは問題冊子の余白を使用してください。
7. 問題冊子は持ち帰ってください。
8. 解答用紙は必ず提出してください。

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

[I] 放物線 $C: y^2 = 4px$ ($p > 0$) の焦点 $F(p, 0)$ を通る 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 は互いに直交し、 C と ℓ_1 は 2 点 P_1, P_2 で、 C と ℓ_2 は 2 点 Q_1, Q_2 で交わるとする。次の間に答えよ。

- (1) ℓ_1 の方程式を $x = ay + p$ と置き、 P_1, P_2 の座標をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とする。 $y_1 + y_2, y_1 y_2$ を a と p で表せ。
- (2) $\frac{1}{P_1 P_2} + \frac{1}{Q_1 Q_2}$ は ℓ_1, ℓ_2 のとり方によらず一定であることを示せ。

[II] 複素数 $z = 1 + 2\sqrt{6}i$ と自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ について、複素数 z^n を実数 a_n, b_n を用いて

$$z^n = a_n + b_n i$$

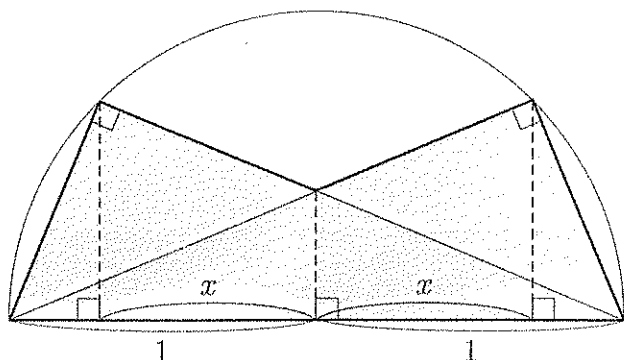
と表す。次の間に答えよ。

- (1) $a_n^2 + b_n^2 = 5^{2n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを示せ。
- (2) すべての n について $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ が成り立つ定数 p, q を求めよ。
- (3) どんな n についても a_n は 5 の整数倍でないことを示せ。
- (4) z^n ($n = 1, 2, 3, \dots$) は実数でないことを示せ。

[III] $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$ とする。次の間に答えよ。

- (1) 実数 t に対して $g(x) = tx - f(x)$ とおく。 x が実数全体を動くとき、 $g(x)$ が最大値をもつような t の範囲を求めよ。また t がその範囲にあるとき、 $g(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた最大値を $m(t)$ とする。 a を定数とし、 t の関数 $h(t) = at - m(t)$ を考える。 t が (1) で求めた範囲を動くとき、 $h(t)$ の最大値を求めよ。

- [IV] 半径 1 の半円を底面とし、高さが 1 の半円柱に含まれる立体 R がある。その高さ x ($0 \leq x \leq 1$) での断面が、次の図のように 2 つの直角三角形を合わせた形になっている。次の問に答えよ。



- (1) 高さ x での R の断面積 $S(x)$ を求めよ。
 - (2) R の体積を求めよ。必要ならば、積分する際に $x = \sin t$ と置き換えよ。
- [V] 空間内に平面 P がある。空間内の図形 A に対し、 A の各点から P に下ろした垂線と P との交点の全体を、 A の P への正射影とよぶ。次の問に答えよ。
- (1) 平面 Q が平面 P と角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) で交わっているとする。すなわち、 P と Q の交線に垂直な平面で P, Q を切ってできる 2 直線のなす角が θ であるとする。 Q 上の長さ 1 の線分の P への正射影の長さの最大値と最小値を求めよ。
 - (2) (1) の Q を考える。 Q 上の 1 辺の長さが 1 である正三角形の P への正射影の面積を求めよ。
 - (3) 1 辺の長さが 1 である正四面体 T の P への正射影 T' はどんな形か。また、 T' の面積の最大値を求めよ。

[以 下 余 白]

このページは下書きに使用してよい。

このページは下書きに使用してよい。

