

第1問

$$P_n = r^{a_1} \cdot r^{a_2} \cdot r^{a_3} \cdots r^{a_n}$$

$$= r^{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}$$

ここで,

$$a_n = 1 + (n-1)d, \quad S_n = \frac{n\{2 + (n-1)d\}}{2}$$

$r > 1$ より,

$$P_3 = P_9 \iff a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9 \iff \frac{3}{2}(2+2d) = \frac{9}{2}(2+8d)$$

$$\therefore d = \boxed{-\frac{2}{11}} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

これより,

$$a_n = 1 - \frac{2}{11}(n-1) = -\frac{2}{11}n + \frac{13}{11}$$

$a_n > 0$ とおく.

$$-\frac{2}{11}n + \frac{13}{11} > 0 \iff \frac{13}{2} > n \quad (n=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$P_n \text{ は, } n = \boxed{6} \text{ のとき (最大値)} = \boxed{r^{\frac{36}{11}}} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

次に,

$$P_n < 1 \iff a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 0$$

$$\iff \frac{n\left\{2 - \frac{2}{11}(n-1)\right\}}{2} < 0$$

$$\iff n(n-12) > 0$$

$$\therefore n > 12 \quad (13 \leq n)$$

$$\therefore \text{(最小の } n) = \boxed{13} \quad \cdots \cdots \text{(答)}$$

第2問

$$(1) \text{ 直線 } AB \text{ の傾き } \frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}{b - a} = -\frac{1}{ab}$$

直線 AB に垂直な直線の傾きは $\boxed{ab}$ (答)

点 $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$ を通り、傾き ab の直線は

$$y = ab(x - c) + \frac{1}{c}$$

$$\iff y = abx - abc + \frac{1}{c} \quad \text{.....①}$$

点 $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ を通り、傾き ac の直線は

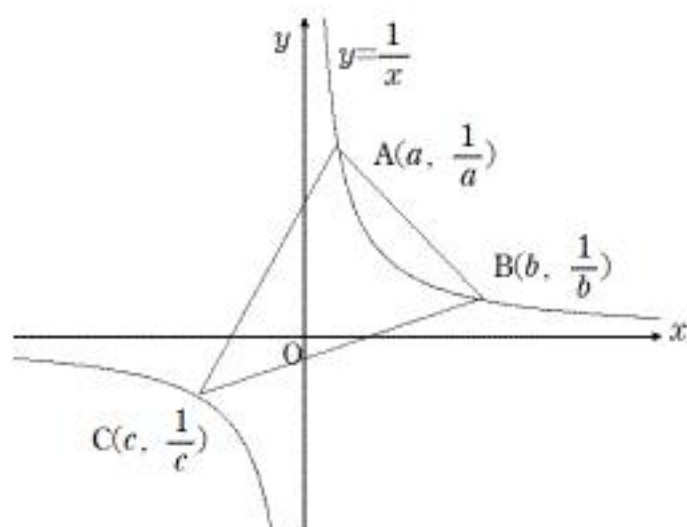
$$y = ac(x - b) + \frac{1}{b}$$

$$\iff y = acx - abc + \frac{1}{b} \quad \text{.....②}$$

①, ②を連立して、 $H\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$

$$\therefore x = \boxed{-\frac{1}{abc}}, y = \boxed{-abc} \quad \text{.....(答)}$$

$$\therefore \boxed{xy = 1} \left[\text{または } y = \frac{1}{x} \right] \quad \text{.....(答)}$$



(2) (i) 2点 B, C の中点 $\left(\frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2bc}\right)$ より、傾き bc の直線は

$$y = bc\left(x - \frac{b+c}{2}\right) + \frac{b+c}{2bc}$$

$$\iff y = bcx + \frac{(b+c)(1-b^2c^2)}{2bc} \quad \text{.....③}$$

2点 A, C の中点 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{a+c}{2ac}\right)$ より、傾き ac の直線は

$$\iff y = acx + \frac{(a+c)(1-a^2c^2)}{2ac} \quad \text{.....④}$$

③, ④を連立して、

$$\text{外心 } P(x, y) = \left(\frac{1}{2} \left(a + b + c + \frac{1}{abc} \right), \frac{1}{2} \left(abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \right) \quad \text{.....(答)}$$

(ii) $\begin{cases} a+b=0 \\ c=1 \end{cases}$ のとき、 $P(x, y)$ は

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{ab} \right) \\ y = \frac{1}{2} (ab + 1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 1 = \frac{1}{ab} \\ 2y - 1 = ab \end{cases}$$

$$\therefore (2x-1)(2y-1) = 1 \quad \left(\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \right)$$

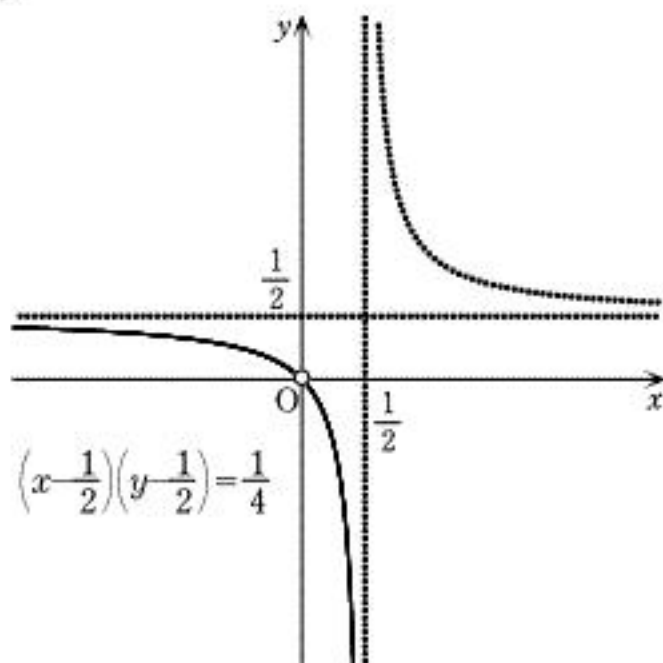
ここで、 $\frac{a+b}{(a \neq 0, b \neq 0)} = 0$ より、 $ab < 0$ となり、 $x < \frac{1}{2}$, $y < \frac{1}{2}$ とわかる。

さらに、点 A, B, C が互いに相異なることと、 $c=1$ より、 $a \neq 1, b \neq 1$ となる必要があり、 $a+b=0$ であるため、 $ab \neq -1$ である。

よって、 $(x, y) = (0, 0)$ は P の軌跡には含まれない。

以上より、 $P(x, y)$ の軌跡は $\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ の $\left(x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}\right), (x, y) \neq (0, 0)$

を満たす部分であり、これを図示すると右図の通り。



第3問

$$(1) \quad ax^2 + bx - mx = ax^2 + (b-m)x \\ = ax(x-\alpha)$$

と表せる.ただし, $D=(b-m)^2 > 0$ ($b \neq m$) とする.

$$S = \left| \int_0^\alpha ax(x-\alpha)dx \right| = a \left| \int_0^\alpha (x^2 - \alpha x)dx \right| = \frac{a}{6} |\alpha|^3 \quad (\text{証明終})$$

$$(2) \quad a_1x^2 + b_1x = a_2x^2 + b_2x$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)x \left(x + \frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2} \right) = 0$$

$a_1 \neq a_2$ より,

$$x = 0, \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} (= \alpha)$$

$$(i) \quad a_2y = a_1a_2x^2 + a_2b_1x \quad \cdots \cdots ①$$

$$a_1y = a_1a_2x^2 + a_1b_2x \quad \cdots \cdots ②$$

ここで,

$$① - ② : (a_2 - a_1)y = (a_2b_1 - a_1b_2)x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2 - a_1}x \quad (①②を同時にみたす点(x,y)の関係式.つまり直線y=mxのみたす方程式)$$

$$\therefore m = \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2 - a_1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(ii) (1)を用いて考えれば,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{|a_2|}{6} |\alpha|^3}{\frac{|a_1|}{6} |\alpha|^3} = \frac{|a_2|}{|a_1|} = -\frac{a_2}{a_1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(a_1 と a_2 は異符号だから)

$$(iii) \quad m=1 \Leftrightarrow \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2 - a_1} = 1$$

$$\Leftrightarrow a_2b_1 - a_1b_2 = a_2 - a_1 \quad \cdots \cdots ③$$

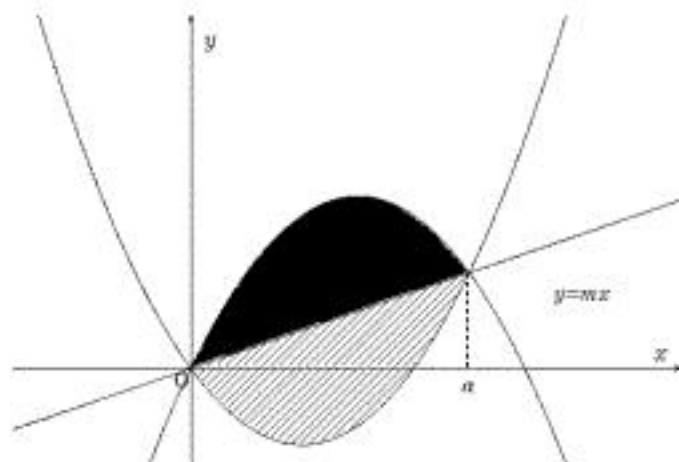
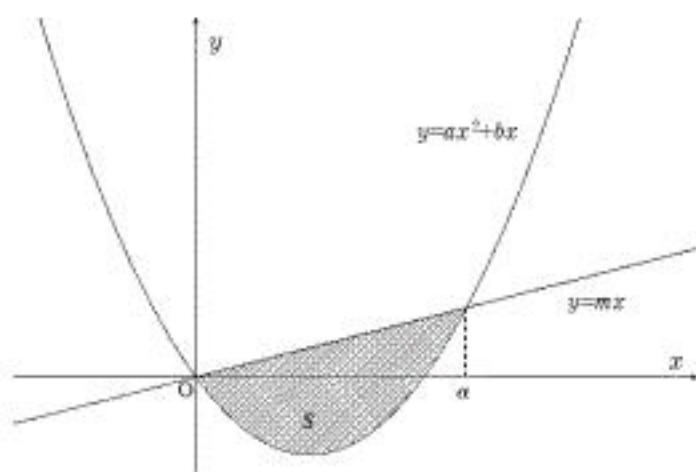
さらに, $S_1 = S_2$ より,

$$\frac{S_2}{S_1} = -\frac{a_2}{a_1} = 1 \Leftrightarrow a_2 = -a_1 \quad \cdots \cdots ④$$

③, ④より,

$$-a_1(b_1 + b_2) = -2a_1 \quad \therefore b_1 + b_2 = 2$$

以上より, $a_1 + a_2 = 0, b_1 + b_2 = 2$ (a_1 と a_2 は逆符号, $b_1 \neq b_2$) $\cdots \cdots (\text{答})$



第4問

$$(1) \quad x^2 - y^2 = p \iff (x+y)(x-y) = p$$

x, y は自然数より, $x+y > 0$, さらに, $p > 0$ より, $x-y > 0$ ($x > y$)

ここで, $x+y > x-y$ に注意すると,

$$\begin{cases} x+y=p \\ x-y=1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=\frac{p+1}{2} \\ y=\frac{p-1}{2} \end{cases} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(2) \quad x^3 - y^3 = p \iff (x-y)(x^2 + xy + y^2) = p$$

$x < x^2, y < y^2$ に注意すれば, $\underbrace{x-y}_{(E)} < \underbrace{x^2 + xy + y^2}_{(E)}$ となり,

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = (E) \text{ だから}$$

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = p \\ x-y=1 \end{cases}$$

$$\therefore p = x^2 + x(x-1) + (x-1)^2$$

$$= 3x(x-1) + 1$$

(偶数)

$$= 6M + 1 \quad (M: \text{自然数}) \quad (\text{証明終})$$

$$(3) \quad (2) \text{ より, } p = 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, \dots\dots, 127$$

$$3x(x-1) + 1 = 7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, \dots\dots, 127$$

$$\iff x(x-1) = {}^{\circ}2, {}^{\times}4, {}^{\circ}6, {}^{\times}10, {}^{\circ}12, {}^{\times}14, {}^{\circ}20, {}^{\times}22, {}^{\times}24, {}^{\times}26, \dots\dots, {}^{\circ}42$$

$$\therefore p_5 = 127 \quad (x=7, y=6) \quad \dots\dots (\text{答})$$