

1

(1) $11 - 6\sqrt{3} < a < 2$

(2) 96

(3) $a = 16, b = 11$

(4) $16\sqrt{11}$

2 $\sin \theta = \frac{4}{5}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より, $\cos \theta = \frac{3}{5}, a_n = 5^n \sin n\theta$

(1) $s_n = \sin n\theta, c_n = \cos n\theta$ とすると,

$$\begin{cases} s_{n+1} = \sin((n+1)\theta) = \sin n\theta \cos \theta + \sin \theta \cos n\theta = \frac{3}{5}s_n + \frac{4}{5}c_n \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ c_{n+1} = \cos((n+1)\theta) = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta = \frac{3}{5}c_n - \frac{4}{5}s_n \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②より, c_n, c_{n+1} を消去して,

$$s_{n+2} = \frac{6}{5}s_{n+1} - s_n \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

$a_n = 5^n s_n$ より, ③の両辺に 5^{n+2} をかけて,

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - 25a_n \dots\dots\dots \textcircled{4} \quad \therefore \underline{A=6, B=-25}$$

(2) $a_1 = 5 \sin \theta = 4$

$a_n \equiv b_n \pmod{5}, 0 \leq b_n \leq 4$ とすると,

④より,

n	1	2	3	4	...
b_n	4	4	4	4	...

$$\begin{aligned} b_{n+2} &\equiv 6b_{n+1} - 25b_n \pmod{5} \\ &\equiv 5(b_{n+1} - 5b_n) + b_{n+1} \pmod{5} \\ &\equiv b_{n+1} \pmod{5} \end{aligned}$$

$\therefore b_n \equiv b_1 \equiv 4 \pmod{5}$ よって, 題意は示された. //

(3) 「 $\theta = \frac{q}{p}\pi$ (p, q は整数) である」 $\cdots(*)$ とする.

$a_n = 5^n \sin n\theta$ において, $n = p$ とすると,

$$a_p = 5^p \sin p \cdot \frac{q}{p}\pi = 5^p \sin q\pi = 0 \text{ となる.}$$

しかし, (2)より, a_n は 5 で割ると 4 余るので矛盾.

したがって, $(*)$ は成立しない. //

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} = n - na^{-\frac{1}{n}}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} = na^{\frac{1}{n}} - n$$

$$f(a) = \log a - \left(n - na^{-\frac{1}{n}} \right) \text{ とすると,}$$

$$f'(a) = \frac{a^{-\frac{1}{n}} - 1}{a^{1+\frac{1}{n}}} > 0 \quad (\because a > 1) \quad \text{かつ} \quad f(1) = 0 \text{ より, } a=1 \text{ で } f(a) > 0 \quad \dots\dots ①$$

$$g(a) = na^{\frac{1}{n}} - n - \log a \text{ とすると,}$$

$$g'(a) = \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{a} > 0 \quad (\because a > 1) \quad \text{かつ} \quad g(1) = 0 \text{ より, } a=1 \text{ で } g(a) > 0 \quad \dots\dots ②$$

①, ②より,

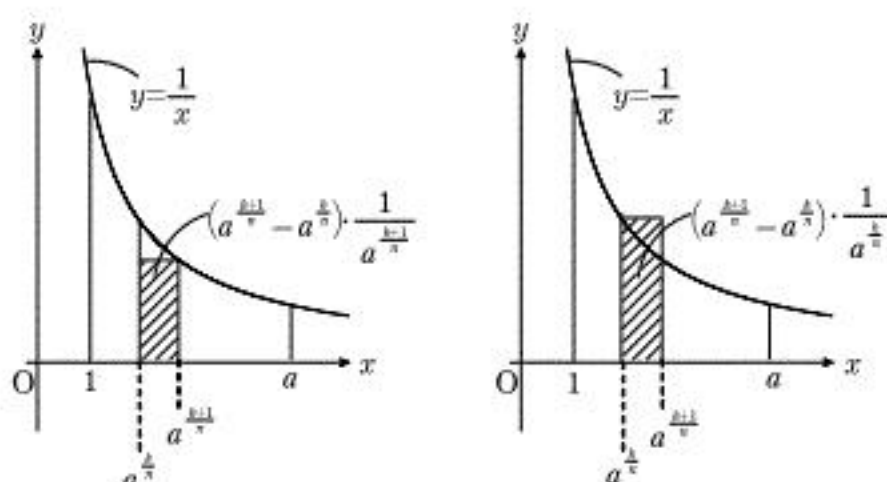
$$n - na^{-\frac{1}{n}} < \log a < na^{\frac{1}{n}} - n$$

よって,

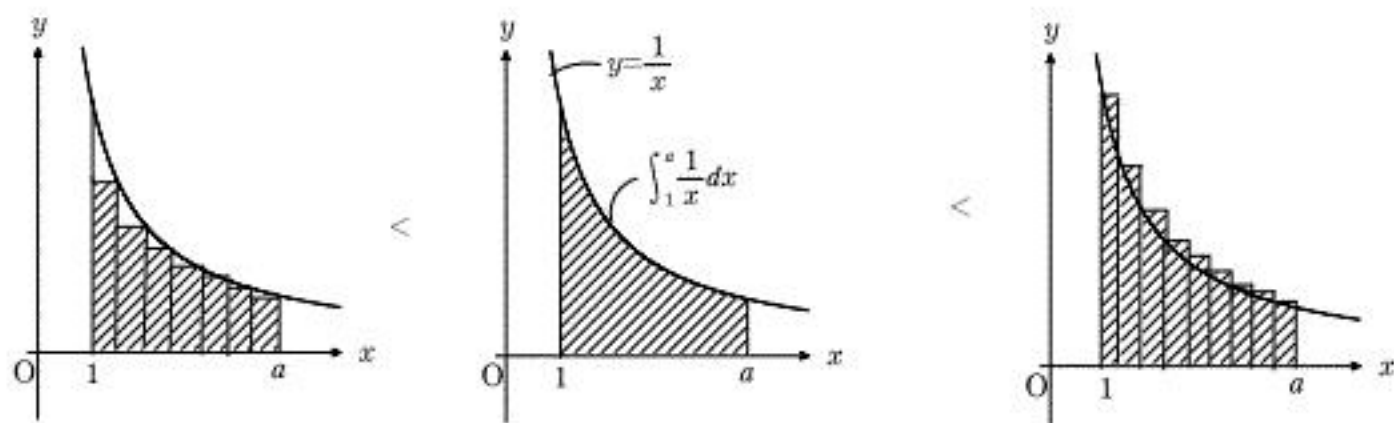
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} < \int_1^a \frac{dx}{x} < \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} //$$

(1)の別解

右図のような面積を考えると,
以下の不等式が成り立つ.



よって,



$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} < \int_1^a \frac{dx}{x} < \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}}$$

$$(2) \quad m = \frac{1}{n} \text{ とする.}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1 - a^{-m}}{m} \\ &= \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1 - (a^{-1})^m}{m - 0} \\ &= -\lim_{m \rightarrow 0} \frac{(a^{-1})^m - (a^{-1})^0}{m - 0} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

ここで, $h_1(x) = (a^{-1})^x$ とすると,

$$\begin{aligned} & h_1'(x) = (a^{-1})^x \log(a^{-1}) \\ & (③) = -h_1'(0) = -(\log(a^{-1})) = \log a \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{a^m - 1}{m} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{a^m - a^0}{m - 0} \quad \dots\dots ④ \end{aligned}$$

ここで, $h_2(x) = a^x$ とすると,

$$\begin{aligned} & h_2'(x) = a^x \log a \\ & (④) = h_2'(0) = \log a \end{aligned}$$

以上より,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \cdot \frac{1}{a^{\frac{k+1}{n}}} = \log a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}} \right) \frac{1}{a^{\frac{k}{n}}} //$$

G :「良い集合」, $\max G$:「最も要素数の多い良い集合」, $n(\max G)$:「最良数」

B :「悪い集合」, $\max B$:「最も要素数の多い悪い集合」, $n(\max B)$:「最悪数」

- (1) $\max B$ を例えば, k 個の異なる素数の集合 $\max B = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ として,

$A = \{p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^k, p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^k, \dots, p_k^1, p_k^2, \dots, p_k^k\}$ を構成すると,

$n(A) = k^2, n(\max G) = k, n(\max B) = k$ となり, これは条件を満たす. ■

- (2) ・他の要素を割り切ることがあるが, 割り切られることがない要素の集合を C ,
 ・他の要素を割り切ることがなく, 割り切られることがある要素の集合を D ,
 ・他の要素を割り切ることがあり, 割り切られることもある要素の集合を E ,
 ・他の要素を割り切ることも割り切られることもない要素の集合を F とする.

例えば, 集合 $A = \{3, 4, 6, 8, 11, 12, 15, 19, 22, 24\}$ とすると,

$C = \{3, 4, 11\}, D = \{15, 22, 24\}, E = \{6, 8, 12\}, F = \{19\}$ で,

$\max G = \{3, 6, 12, 24\}, n(\max G) = 4, \max B = \{15, 22, 24, 19\}, n(\max B) = 4.$

一般に, 集合 A において, $n(D) + n(F) \leq n(\max B)$ が成立する.

集合 A から集合 D, F の要素を除き, 集合 A' を新たに作る作業を, A の要素が全て消えるまで繰り返す.

このとき, 集合 $\max G$ の要素は大きい要素から 1 つずつ消えていくことになるので,

全て消えるまで回数は $n(\max G)$ と一致する. よって, $n(A) \leq n(\max B) \cdot n(\max G)$ が成立する.

ここで, $n(A) \geq k^2 + 1$ のとき, $k^2 + 1 \leq n(\max B) \cdot n(\max G)$ が成り立つので,

$n(\max B) \leq k, n(\max G) \leq k$ は成り立たない.

よって, $n(A) \geq k^2 + 1$ のとき, $n(\max B), n(\max G)$ のどちらかは $k + 1$ 以上となる. ■

- (3) $44^2 = 1936, 45^2 = 2025$ より, $44^2 + 1 \leq 2014 \leq 45^2$ (2)の事実より, $n(\max G) = n(\max B) = 44$ は不可能. したがって, $n(\max G)$ の最小値の候補は 45.

ここで, 45 個の素数で, $\max B = \{p_1, p_2, \dots, p_{45}\}$ を考えて,

$A^+ = \{p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^{45}, p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^{45}, \dots, p_{45}^1, p_{45}^2, \dots, p_{45}^{45}\}, n(A^+) = 2025$ を構成し,

この集合 A^+ から 11 個の要素, たとえば, $p_1^{35}, \dots, p_1^{45}$ を除いたものを A とすると,

$n(A) = 2014, n(\max G) = n(\max B) = 45$ が実現できる.

よって, 求める集合は, $A = \{p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^{34}, p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^{45}, \dots, p_{45}^1, p_{45}^2, \dots, p_{45}^{45}\}$ ■