第１問

(1)　$f'(x)=6x^2-6x-12$

$=6(x+1)(x-2)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$\begin{cases} x=-1\text{で極大値をとるから}\alpha=-1 \\ x=2\text{で極大値をとるから}\beta=2 \end{cases}$ ……(答)

(2)　$F(x)=f(x)-g(x)$

$=2x^3-3x^2-12x-\left(-9x^2+6x+a\right)$

$=2x^3+6x^2-18x-a$

$x>-1$ において $F(x)\geqq 0$ をみたす，定数 a の値の範囲を調べる．

$F'(x)=6x^2+12x-18$

$=6(x+3)(x-1)$

x	(-1)	$\cdots$	1	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		↘	$-10-a$	↗
			(最小)	

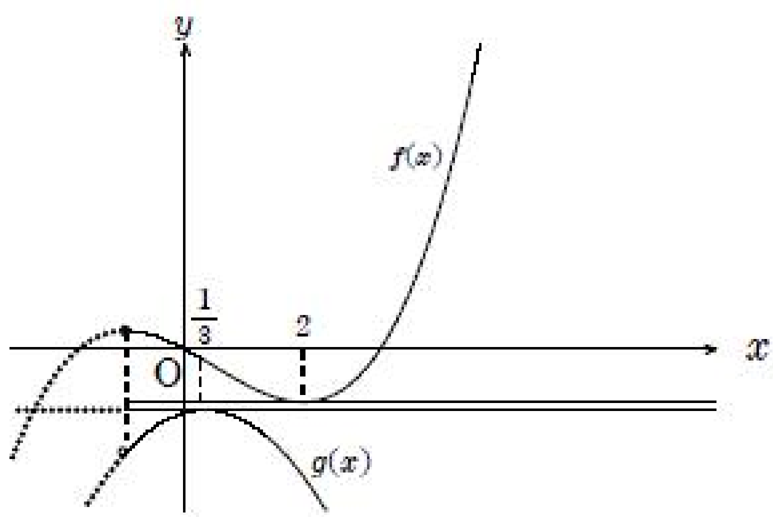
ここで，$F(1)=-10-a\geqq 0$ となればよく，$a\leqq -10$ ……(答)

(3)　$g(x)=-9x^2+6x+a$

$=-9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+a+1$

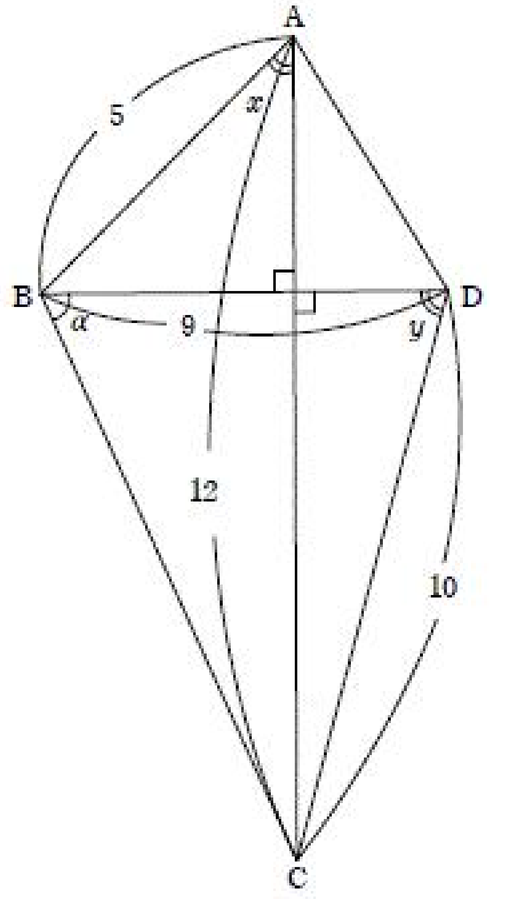
$f(2)\geqq g\left(\dfrac{1}{3}\right)$ となればよい．

$-20\geqq a+1$　　$\therefore a\leqq -21$ ……(答)



第 2 問

(1) $\begin{cases} 5\cos x + 10\sin y = 12 & \cdots\cdots ① \\ 5\sin x + 10\cos y = 9 & \cdots\cdots ② \end{cases}$



①②より，

$(12-5\cos x)^2+(9-5\sin x)^2=100$

$\Longleftrightarrow\ 225-30(3\sin x+4\cos x)+25=100$

$\Longleftrightarrow\ 5\sin(x+\varphi)=5$

$\Longleftrightarrow\ \sin(x+\varphi)=1$

ただし，$\sin\varphi=\dfrac{4}{5}, \cos\varphi=\dfrac{3}{5}, 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ である．

ここで，$0<x<\pi$ より，$0<x+\varphi<\dfrac{3}{2}\pi$

$\therefore\ x+\varphi=\dfrac{\pi}{2}\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)$

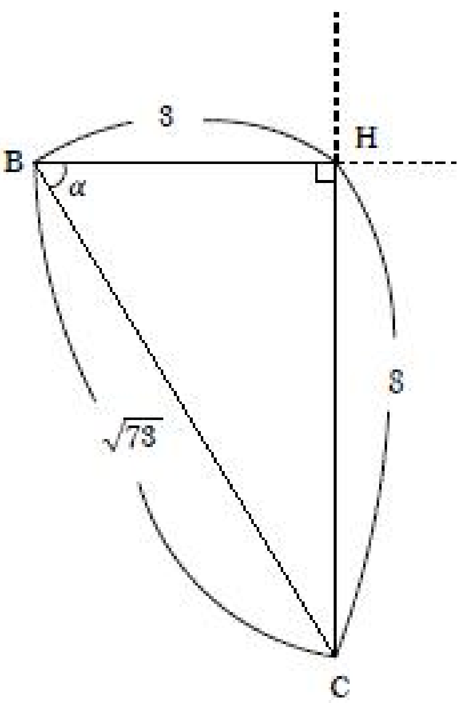
$$\therefore \begin{cases} \sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\dfrac{3}{5} & \cdots\cdots(答) \\ \sin y=\dfrac{12-5\cos x}{10}=\dfrac{12-5\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}{10}=\dfrac{4}{5} & \cdots\cdots(答) \end{cases}$$

(2) 対角線 AC , BD の交点を H とする．

(1)の結果を用いて

$BH=5\sin x=3$

$CH=10\sin y=8$



これより，$BC=\sqrt{3^2+8^2}=\sqrt{73}$

$$\therefore \begin{cases} \sin\alpha=\dfrac{8}{\sqrt{73}} \\ \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{73}} \end{cases} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=5\cdot\sqrt{73}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x+\alpha\right)$

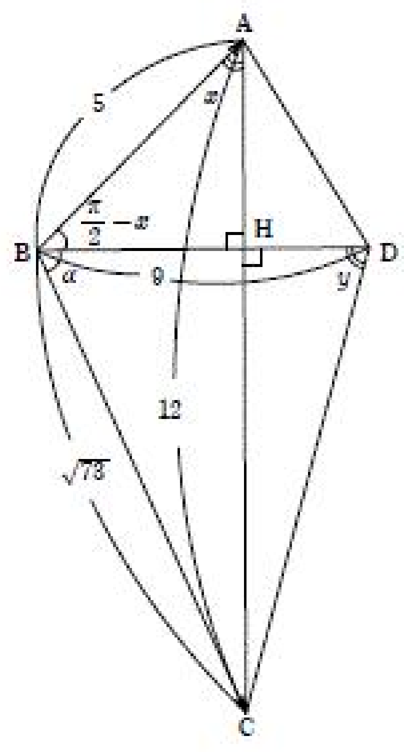
$=5\sqrt{73}\sin(x-\alpha)$

$=5\sqrt{73}(\sin x\cdot\cos\alpha-\cos x\cdot\sin\alpha)$

$=5\sqrt{73}\left(\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{73}}-\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{8}{\sqrt{73}}\right)$

$=9-32$

$=-23\quad\cdots(答)$



第３問

(1)　真数条件より，$\begin{cases} y-1>0 \\ x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases}$　$\therefore\ \underline{x>3,\ y>1}$ ……①

$\log_2(y-1)=\log_2(x-2)+\log_2(x-3)$

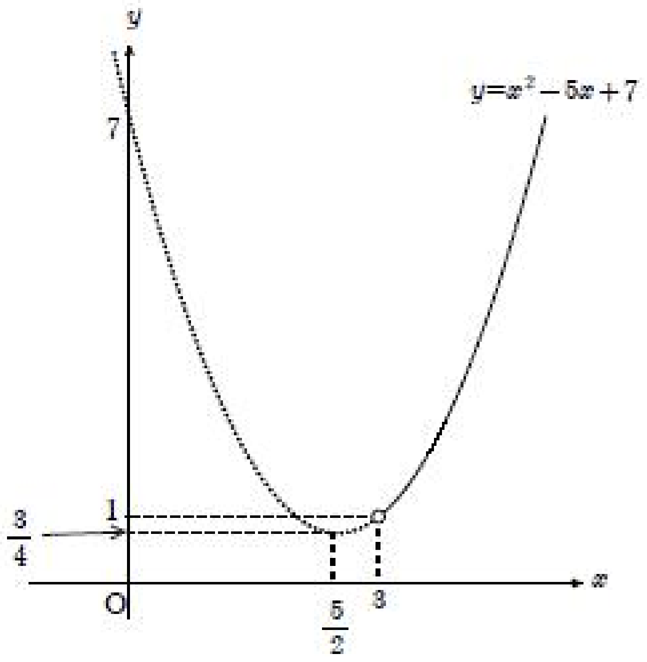
$\iff \log_2(y-1)=\log_2(x-2)(x-3)$

$\iff y-1=x^2-5x+6$

$\therefore$　曲線 A：$y=x^2-5x+7$

$=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

$(x>3,\ y>1)$



(2)

$x^2-5x+7=\alpha x+\beta$

$\iff x^2-(\alpha+5)x+7-\beta=0$ ……②

②が重解をもつから，

判別式 $D=(\alpha+5)^2-4(7-\beta)=0$

$\iff \alpha^2+10\alpha+25-28+4\beta=0$

$\iff \beta=\dfrac{1}{4}(-\alpha^2-10\alpha+3)$

このもとで，重解 $x=\dfrac{\alpha+5}{2}$ より，

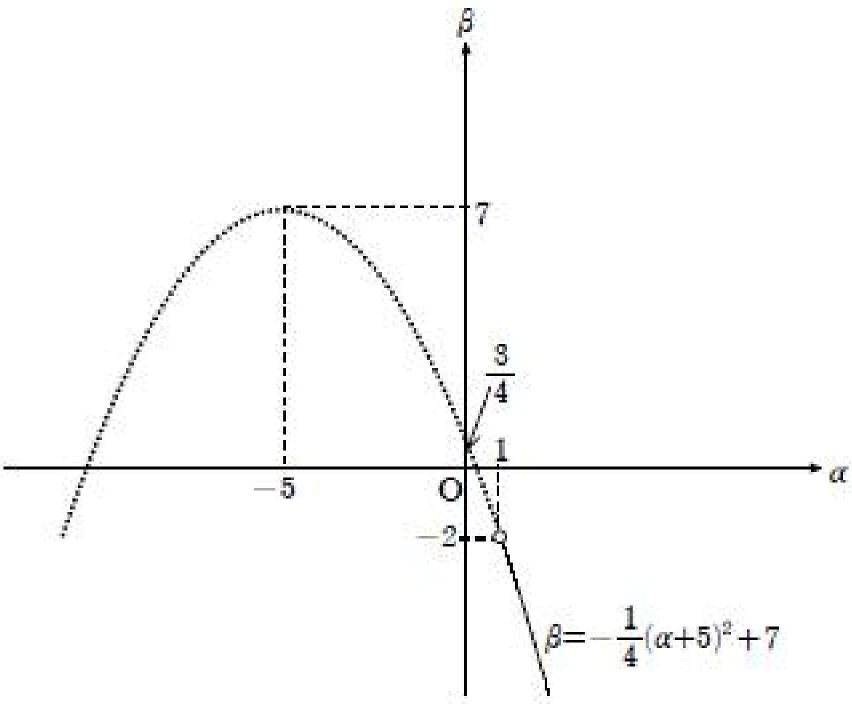
$\dfrac{\alpha+5}{2}>3 \iff \underline{\alpha>1}$

ここで，$\beta=-\dfrac{1}{4}(\alpha+5)^2+7$ $(\alpha>1)$

を描くと，右図の通り．

以上より，

$\begin{cases} \beta=-\dfrac{1}{4}(\alpha+5)^2+7 \\ (\alpha>1,\ \beta<-2) \end{cases}$ ……(答)



(3)

$x^2-5x+7=ax+b$

$\iff x^2-(a+5)x+7-b=0$ ……③

③が，$x>3$ で実解をもたなければよい．

ここで，

$f(x)=x^2-(a+5)x+7-b$

$=\left(x-\dfrac{a+5}{2}\right)^2+\cdots$

$D=(a+5)^2-4(7-b)$

$=(a+5)^2-28+4b$

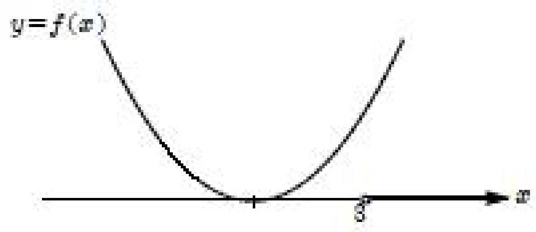
$f(3)=-3a-b+1$

(i)　$D<0$ のとき

$(a+5)^2-28+4b<0 \iff b<-\dfrac{1}{4}(a+5)^2+7$

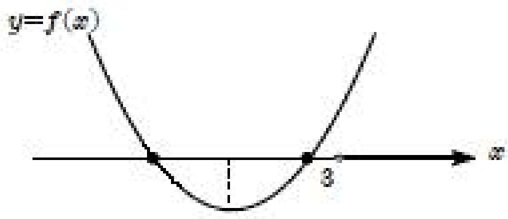
(ii)　$D=0$ のとき

$\begin{cases} b=-\dfrac{1}{4}(a+5)^2+7 \\ \dfrac{a+5}{2}\leqq 3\ (a\leqq 1) \end{cases}$



(iii)　$D>0$ のとき

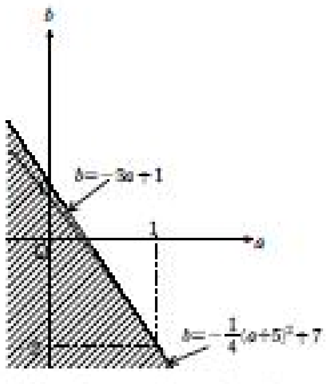
$\begin{cases} b>-\dfrac{1}{4}(a+5)^2+7 \\ \dfrac{a+5}{2}<3 \\ -3a-b+1\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b>-\dfrac{1}{4}(a+5)^2+7 \\ a<1 \\ b\leqq -3a+1 \end{cases}$



以上(i)〜(iii)をまとめて，

$\begin{cases} b\leqq -3a+1 & (a\leqq 1) \\ b<-\dfrac{1}{4}(a+5)^2+7 & (a>1) \end{cases}$ ……(答)

(参考)



(破線は境界を含まない)