

[1]

(1) $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ のとき, $(2\alpha + 1)^2 = (\sqrt{3}i)^2 = -3$ から $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ が成立する。よって,

$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$ から $\alpha^3 = 1$ が成立。従って,

$$S_{3m} = \sum_{k=1}^{3m} \alpha^{k-1} = \frac{1 - \alpha^{3m}}{1 - \alpha} = \frac{1 - 1}{1 - \alpha} = 0 \quad \dots \text{答}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \alpha T_{3m} - T_{3m} &= \sum_{k=1}^{3m} (k\alpha^k - k\alpha^{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{3m} \{ (k\alpha^k - (k-1)\alpha^{k-1}) - \alpha^{k-1} \} \\ &= \sum_{k=1}^{3m} \{ k\alpha^k - (k-1)\alpha^{k-1} \} - \sum_{k=1}^{3m} \alpha^{k-1} \\ &= 3m\alpha^{3m} - 0\alpha^0 - S_{3m} \\ &= 3m \end{aligned}$$

から,

$$T_{3m} = \frac{3m}{\alpha - 1} = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} m \quad \dots \text{答}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad T_{2014} &= T_{2013+1} \\ &= T_{3 \cdot 671} + 2014 \cdot \alpha^{3 \cdot 671} \\ &= \frac{-3 - \sqrt{3}i}{2} \cdot 671 + 2014 \cdot 1 \\ &= \frac{2015 - 671\sqrt{3}i}{2} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

〔Ⅱ〕

(1) $f(x) = x^3 - ax - b$ について、 $a > 0$ のとき、 $f'(x) = 3x^2 - a$ から

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{a}{3}}$$

なので関数 $f(x)$ の増減は右の表のようになるから、

極大値は、

$$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9}a\sqrt{a} - b \quad \cdots \text{答}$$

極小値は、

$$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}a\sqrt{a} - b \quad \cdots \text{答}$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

(2) $a > 0$ のとき、 $f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right) = \frac{1}{27}(27b^2 - 4a^3) = d$ とする。

(i) $27b^2 - 4a^3 > 0$ のとき、

$a > 0$ なら $d > 0$ だから $y = f(x)$ のグラフは x 軸と 1 点のみを共有するので、
3 次方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ。

$a \leq 0$ なら $f'(x) \geq 0$ となり、 $y = f(x)$ は極値の無い 3 次関数である。

このとき $y = f(x)$ のグラフは x 軸と 1 点のみを共有するので、

3 次方程式 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ。

(ii) $27b^2 - 4a^3 = 0$ かつ $a > 0$ のとき、

$d = 0$ だから $y = f(x)$ のグラフは x 軸と 2 点を共有するので、

3 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。

(iii) $27b^2 - 4a^3 < 0$ のとき、 $27b^2 < 4a^3$ から $a > 0$ であり、

このとき $d < 0$ だから $y = f(x)$ のグラフは x 軸と 3 点を共有するので、

3 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 3 つの実数解をもつ。

以上より題意は示せた。 $\cdots$ 証明終わり

〔Ⅲ〕

サイコロ(右図)に次の6つの文字(A, B, Cの3色とする)を書き入れると考える。

$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$$

書き入れ方は全部で、

$$6! = 720 \text{ (通り)}$$

あり、これらは全て同様に確からしい。

(1) ①, ⑥の塗り方は、色を選んでからどちらをどの面に塗るかを考えて、

$${}_3C_1 \times 2 = 6 \text{ (通り)}$$

次に②, ⑤を塗る。先ほどと同様に考えて、

$${}_2C_1 \times 2 = 4 \text{ (通り)}$$

最後に③, ④を塗る。塗り方は2通り。以上より求める確率は、

$$\frac{6 \times 4 \times 2}{720} = \frac{1}{15} \quad \cdots \text{答}$$

(2) 2組の向かい合う面が同色で、1組の向かい合う面が異なる色になることはない。

向かい合う面の1組だけが同色となる確率を考える。

①, ⑥のみが同色になる場合、①, ⑥の塗り方は、(1)と同様に考えて、

$${}_3C_1 \times 2 = 6 \text{ (通り)}$$

次に②, ⑤と③, ④を『②の色 ≠ ⑤の色』かつ『③の色 ≠ ④の色』となるように塗る。

②の決め方は4通り。すると④は2通り。最後に③, ⑤の塗り方で、2通り。

以上より①, ⑥のみが同色になる確率は、

$$\frac{6 \times 4 \times 2 \times 2}{720} = \frac{2}{15}$$

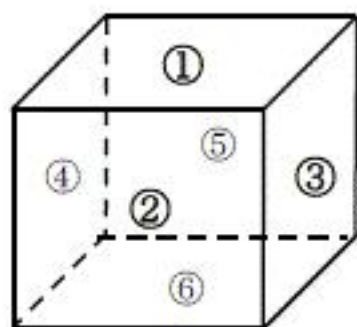
②, ④のみが同色, ③, ⑤のみが同色になる確率も同様なので、向かい合う面の1組だけが同色になる

確率は、 $\frac{2}{15} \times 3 = \frac{2}{5}$ となる。よって、向かい合う2面が、どの組についても同じ色にならない確率は、

$$1 - \left(\frac{2}{5} + 0 + \frac{1}{15} \right) = \frac{8}{15} \quad \cdots \text{答}$$

(3) (1), (2)の結果より、向かい合う2面の組のうち、2面の色が同じになる組の個数の期待値は、

$$1 \times \frac{2}{5} + 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{15} = \frac{3}{5} \quad \cdots \text{答}$$



[IV]

$$f(x) = \int_x^{x+\log 2} |e^{2t} - e^t - 2| dt \text{ について}$$

$$(1) \quad g(t) = e^{2t} - e^t - 2 = (e^t + 1)(e^t - 2)$$

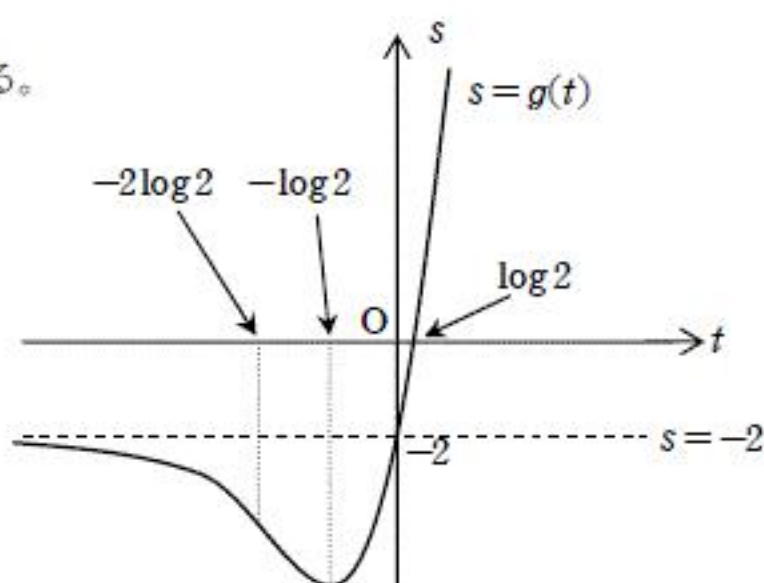
$$g'(t) = 2e^{2t} - e^t = 2e^t \left(e^t - \frac{1}{2} \right), \quad g''(t) = 4e^{2t} - e^t = 4e^t \left(e^t - \frac{1}{4} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -2$$

より下の増減表とで $s = g(t)$ のグラフは右のようになる。

($s = -2$ は漸近線)

t	...	$-2\log 2$	...	$-\log 2$	
$g'(t)$	-		-	0	+
$g''(t)$	-	0	+		+
$g(t)$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$



$$(2) \quad h(t) = \frac{1}{2}e^{2t} - e^t - 2t \text{ とすると } h'(t) = g(t) \text{ が成立する。また,}$$

$$h(x + \log 2) = \frac{1}{2}e^{2x+\log 4} - e^{x+\log 2} - 2x - 2\log 2 = 2e^{2x} - 2e^x - 2x - 2\log 2$$

$$h(\log 2) = \frac{1}{2}e^{\log 4} - e^{\log 2} - 2\log 2 = -2\log 2$$

である。

(i) $x \leq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\log 2} -g(t) dt = [-h(t)]_x^{x+\log 2} = h(x) - h(x + \log 2) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x - (2e^{2x} - 2e^x - 2x - 2\log 2) \\ &= -\frac{3}{2}e^{2x} + e^x + 2\log 2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(ii) $0 \leq x \leq \log 2$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{\log 2} -g(t) dt + \int_{\log 2}^{x+\log 2} g(t) dt \\ &= [-h(t)]_x^{\log 2} + [h(t)]_{\log 2}^{x+\log 2} \\ &= h(x) - h(\log 2) + h(x + \log 2) - h(\log 2) \\ &= \frac{5}{2}e^{2x} - 3e^x - 4x + 2\log 2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

(iii) $\log 2 \leq x$ のとき,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\log 2} g(t) dt = [h(t)]_x^{x+\log 2} = h(x + \log 2) - h(x) \\ &= 2e^{2x} - 2e^x - 2x - 2\log 2 - \left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x - 2x \right) \\ &= \frac{3}{2}e^{2x} - e^x - 2\log 2 \quad \cdots \text{答} \end{aligned}$$

$$(3) \quad f'(x) = \begin{cases} -3e^{2x} + e^x = e^x(1 - 3e^x) & (x < 0) \\ 5e^{2x} - 3e^x - 4 = 5 \left(e^x - \frac{3 + \sqrt{89}}{10} \right) \left(e^x - \frac{3 - \sqrt{89}}{10} \right) & (0 < x < \log 2) \\ 3e^{2x} - e^x = e^x(3e^x - 1) > 0 & (\log 2 < x) \end{cases}$$

より関数 $f(x)$ の増減は右のようになるから,

$$e^x = \frac{1}{3} \quad \text{つまり } x = -\log 3 \text{ で極大}$$

$$e^x = \frac{3 + \sqrt{89}}{10} \quad \text{つまり } x = \log \frac{3 + \sqrt{89}}{10} \text{ で極小}$$

となる。 $\cdots$ 答

x	...	$-\log 3$	...	$\log \frac{3 + \sqrt{89}}{10}$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

[V]

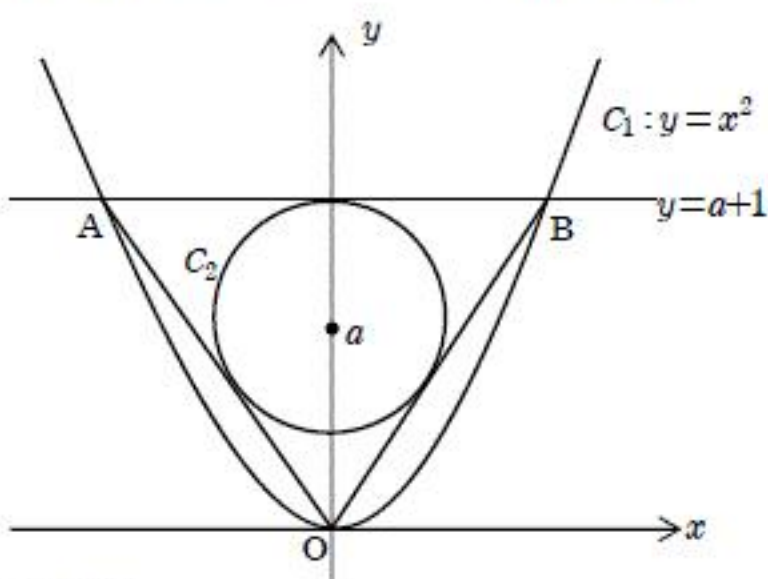
(1) $B(\sqrt{a+1}, a+1)$ とする。直線 OB の方程式は $y = \sqrt{a+1}x$ であり、これと点 $(0, a)$ の距離は、

$$\frac{|\sqrt{a+1} \cdot 0 - a|}{\sqrt{a+1+(-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a+2}}$$

これが円 C_2 の半径 1 に一致するとき、

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sqrt{a+2}} = 1 &\Leftrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -1, 2 \end{aligned}$$

$a \geq 0$ より $a = 2$ …答



(2) 点 (s, t) は円 C_2 上の点だから、

$$s^2 + (t-2)^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。さて、点 (s, t) における円 C_2 の接線の方程式は、

$$sx + (t-2)(y-2) = 1$$

これと $y = x^2$ とで y を消去すると、

$$sx + (t-2)(x^2 - 2) = 1$$

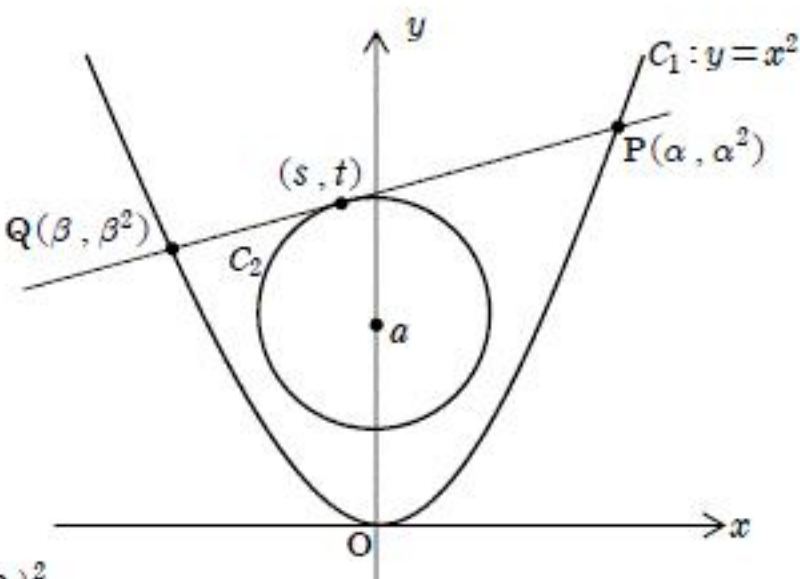
$$\Leftrightarrow (t-2)x^2 + sx - 2t + 3 = 0$$

この x の 2 次方程式の 2 解が α, β なので、

$$\alpha + \beta = \frac{s}{2-t}, \quad \alpha\beta = \frac{2t-3}{2-t}$$

が成立。よって、

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 - \alpha^2\beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta - (\alpha\beta)^2 \\ &= \left(\frac{s}{2-t}\right)^2 - 4\frac{2t-3}{2-t} - \left(\frac{2t-3}{2-t}\right)^2 \\ &= \frac{s^2 + 4t^2 - 16t + 15}{(2-t)^2} \\ &= \frac{1 - (t-2)^2 + 4t^2 - 16t + 15}{(2-t)^2} \\ &= \frac{3(2-t)^2}{(2-t)^2} = 3 \quad (s, t \text{ によらない定数}) \quad \dots \text{示せた} \end{aligned}$$



(3) (2) の結果より、

$$(\alpha - \beta)^2 - \alpha^2\beta^2 = 3 \quad \dots \textcircled{2}$$

また(2)と同様に円 C_2 の接線と C_1 の交点が P, R となることから、

$$(\alpha - \gamma)^2 - \alpha^2\gamma^2 = 3 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成立する。②-③から、

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 - (\alpha - \gamma)^2 - \alpha^2(\beta^2 - \gamma^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \{2\alpha - (\beta + \gamma)\}(\gamma - \beta) - \alpha^2(\beta + \gamma)(\beta - \gamma) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha - (\beta + \gamma) + \alpha^2(\beta + \gamma) &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta + \gamma = \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} \quad \dots \textcircled{4} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

また②+③から、

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 - \alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) &= 6 \\ \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha(\beta + \gamma) + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2(\beta^2 + \gamma^2) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 2\alpha(\beta + \gamma) + (1 - \alpha^2)\{(\beta + \gamma)^2 - 2\beta\gamma\} - 6 &= 0 \\ \text{これに④を代入すると、} \\ 2\alpha^2 - 2\alpha \frac{2\alpha}{1 - \alpha^2} + (1 - \alpha^2)\left\{\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}\right)^2 - 2\beta\gamma\right\} - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2\alpha^2 - 6 = 2(1 - \alpha^2)\beta\gamma \\ \Leftrightarrow \beta\gamma = \frac{\alpha^2 - 3}{1 - \alpha^2} \quad \dots \textcircled{5} \quad \dots \text{答} \end{aligned}$$

(4) 直線 QR の方程式は、

$$y = (\beta + \gamma)(x - \beta) + \beta^2 = (\beta + \gamma)x - \beta\gamma$$

から、

$$(\beta + \gamma)x - y - \beta\gamma = 0$$

これと点 $(0, 2)$ の距離は、

$$\frac{|(\beta + \gamma) \cdot 0 - 2 - \beta\gamma|}{\sqrt{(\beta + \gamma)^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + \beta\gamma|}{\sqrt{(\beta + \gamma)^2 + 1}}$$

これに④、⑤を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\left|2 + \frac{\alpha^2 - 3}{1 - \alpha^2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2\alpha}{1 - \alpha^2}\right)^2 + 1}} &= \frac{\left|\frac{-\alpha^2 - 1}{1 - \alpha^2}\right|}{\sqrt{\frac{(1 + \alpha^2)^2}{(1 - \alpha^2)^2}}} \\ &= \frac{\frac{\alpha^2 + 1}{|1 - \alpha^2|}}{\frac{1 + \alpha^2}{|1 - \alpha^2|}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって直線 QR は円 C_2 と接する。 …証明終わり

