第１問

(1) $f(x)=ax^2+bx+c$ $(abc\neq 0)$ とおく．

$$\begin{cases} f(a)=a^3+ab+c=b & \cdots\cdots① \\ f(b)=ab^2+b^2+c=c & \cdots\cdots② \\ f(c)=ac^2+bc+c=a & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

②より，$b^2(a+1)=0$ $\qquad\therefore\ \underline{a=-1\ (b\neq 0\text{より})}$ (答)

(2)

$$\left.\begin{matrix}①\\③\end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow\begin{cases}-1-b+c=b\ \left(b=\dfrac{c-1}{2}\right)\\ -c^2+bc+c=-1\end{cases}$$

$$-c^2+c\cdot\frac{c-1}{2}+c=-1$$

$$\Longleftrightarrow -2c^2+c^2-c+2c=-2$$

$$\Longleftrightarrow c^2-c-2=0$$

$$\Longleftrightarrow (c+1)(c-2)=0 \qquad \therefore\ c=-1,\ 2$$

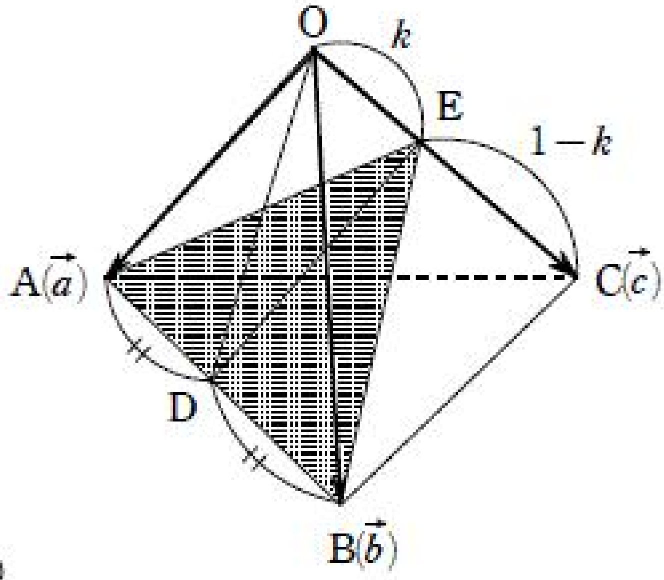
$$\therefore\ (b,c)=(-1,-1),\ \left(\frac{1}{2},2\right)$$

（いずれも $abc\neq 0$ をみたす）

ただし，条件より $(b,c)=(-1,-1)$ は不適

$$\therefore\ \underline{b=\frac{1}{2},\ c=2} \qquad \text{(答)}$$

第 2 問



$$\begin{cases} \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = 1 \\ \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \cdots\cdots ①$$

(1)
$$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$= \underline{k\vec{c} - \frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)} \ (答)$$

(2)
$$\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|^2 = \left|k\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right|^2$$
$$= k^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - k\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - k\cdot\frac{1}{2} \qquad (\because ①)$$
$$= k^2 - k + \frac{3}{4} \qquad (>0)$$
$$\therefore \ \underline{\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right| = \sqrt{k^2 - k + \frac{3}{4}}} \ (答)$$

(3)
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \left(\vec{b} - \vec{a}\right)\cdot\left(k\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$
$$= \frac{k}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \qquad (\because ①)$$
$$= \underline{0} \ (答)$$

(4) (3)より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{DE}}$
$$S(=\triangle \mathrm{EAB}) = \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{DE}}\right|\cdot\frac{1}{2}$$
$$= \underline{\frac{1}{2}\sqrt{k^2 - k + \frac{3}{4}}} \ (答)$$

さらに，$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}} \geqq \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\left(k = \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$\underline{k = \dfrac{1}{2}}$ $(0 < k < 1$ をみたす$)$のとき S は最小となり，$\underline{(S\text{ の最小値}) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}}$ (答)

第3問

(1)　$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\overset{(ア)}{\boxed{120}}$ 通り

A，B，C，D，E の帽子をそれぞれ a，b，c，d，e とすると，

A，B，C，D，E

a，　$\leftarrow$ - - - - - - - b，c，d，e を並べ替えて

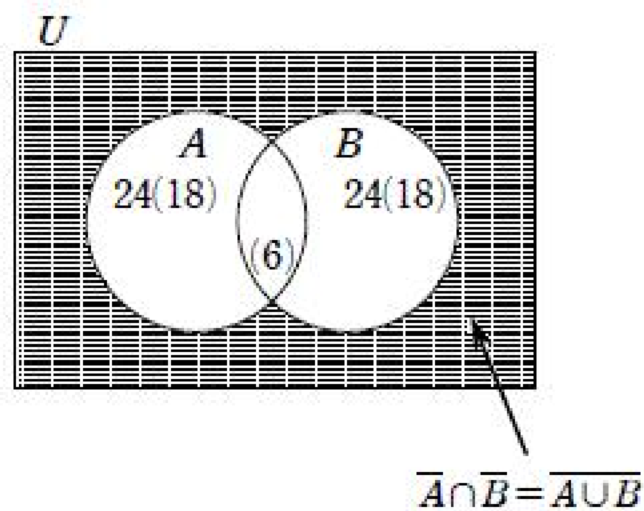
$n(A)=4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=\overset{(イ)}{\boxed{24}}$ 通り $(=n(B))$

A，B，C，D，E

a，b，　$\leftarrow$ - - - - - - - c，d，e を並べ替えて

$n(A\cap B)=3!=3\cdot2\cdot1=\overset{(ウ)}{\boxed{6}}$ 通り

$$
\begin{aligned}
&n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})\\
&=120-(24+24-6)\\
&=120-42\\
&=\overset{(エ)}{\boxed{78}}\text{ 通り}
\end{aligned}
$$



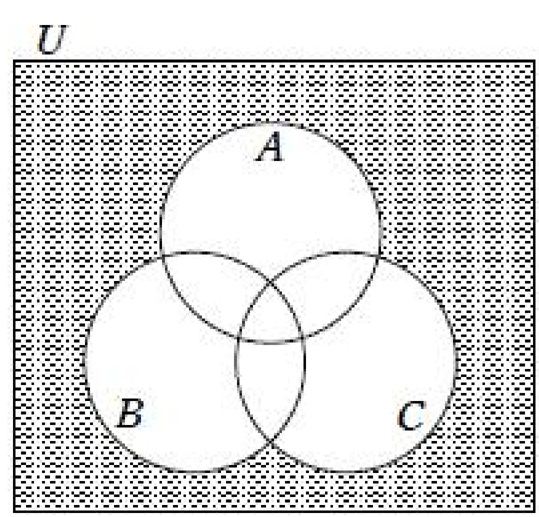
(2)

$$
\begin{cases}
n(A)=n(B)=n(C)=24\\
n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=6\\
n(A\cap B\cap C)=2
\end{cases}
$$

これより，

$$
\begin{aligned}
n(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})&=n(\overline{A\cup B\cup C})\\
&=120-(24+24+24-6-6-6+2)\\
&=120-56\\
&=64\text{ 通り}
\end{aligned}
$$

（答）



第４問

(1) 「$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$)」……①

（Ⅰ）$n=1$ のとき，

$$(\text{左辺})=1\cdot 1!=1$$

$$(\text{右辺})=2!-1=1$$

$n=1$ のとき，①は成立．

（Ⅱ）$n=k$ で成立を仮定．

すなわち $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots\cdots+k\cdot k!=(k+1)!-1$ とすると，

$$\underline{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots\cdots+k\cdot k!}+(k+1)\cdot(k+1)!$$

(仮定)↓

$$=\underline{(k+1)!-1}+(k+1)\cdot(k+1)!$$

$$=(k+2)\cdot(k+1)!-1$$

$$=(k+2)!-1$$

$n=k$ で成立すれば，$n=k+1$ でも成立．

以上（Ⅰ），（Ⅱ）より，任意の自然数 n に対して①は成立．　（証明終）

(2) $2015=a_1\cdot 1!+a_2\cdot 2!+\cdots\cdots+a_n\cdot n!$（$a_k$ は $0\leqq a_k\leqq k$ の整数）

$n!$ は n における増加列より，

$$\underset{(720)}{6!}<2015<\underset{(5040)}{7!}$$

と評価できるので，$\underline{n=6}$（答）

(3)

$$\begin{aligned}
2015&=720\cdot 2+575 &&\leftarrow a_6=2\ (2\cdot 6!)\\
575&=120\cdot 4+95 &&\leftarrow a_5=4\ (4\cdot 5!)\\
95&=24\cdot 3+23 &&\leftarrow a_4=3\ (3\cdot 4!)\\
23&=6\cdot 3+5 &&\leftarrow a_3=3\ (2\cdot 3!)\\
5&=2\cdot 2+1 &&\leftarrow a_2=2\ (2\cdot 2!)\\
1&=1\cdot 1 &&\leftarrow a_1=1\ (1\cdot 1!)
\end{aligned}$$

$2015=1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+3\cdot 4!+4\cdot 5!+2\cdot 6!$ と表せ，

ただ１通りに決まるので，$\underline{a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3,\ a_4=3,\ a_5=4,\ a_6=2}$（答）