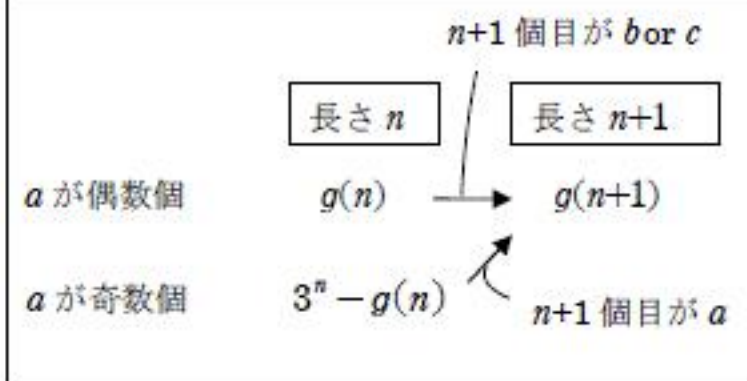




(1) 長さ  $n$  の順列  $\dots\dots 3^n$

右のダイアグラムより,

$$\begin{aligned} g(n+1) &= 2g(n) + \{3^n - g(n)\} \\ &= g(n) + 3^n \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(2)  $g(n) = a_n$  とする.

$$a_{n+1} = a_n + 3^n, \quad a_1 = 2$$

両辺を  $3^{n+1}$  で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3}$$

$b_n = \frac{a_n}{3^n}$  とする.

$$b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left( b_n - \frac{1}{2} \right)$$

$c_n = b_n - \frac{1}{2}$  とする.

$$c_{n+1} = \frac{1}{3}c_n, \quad c_1 = \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow c_n = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} = b_n - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow b_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{a_n}{3^n}$$

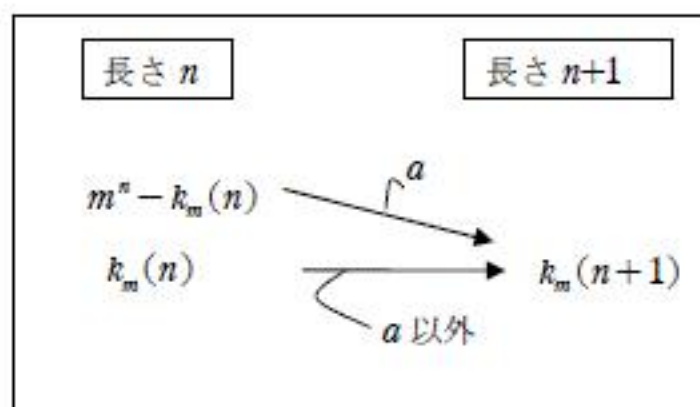
よって,

$$a_n = g(n) = \frac{3^n + 1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{aligned} (3) \quad k_m(n+1) &= 1 \cdot (m^n - k_m(n)) + (m-1) \cdot k_m(n) \\ &= (m-2)k_m(n) + m^n \end{aligned}$$

両辺  $m^{n+1}$  で割って

$$\frac{k_m(n+1)}{m^{n+1}} = \frac{m-2}{m} \cdot \frac{k_m(n)}{m^n} + \frac{1}{m}$$



$d_n = \frac{k_m(n)}{m^n}$  とする.

$$d_{n+1} = \frac{m-2}{m}d_n + \frac{1}{m}, \quad d_1 = \frac{k_m(1)}{m} = \frac{1}{m} \quad (k_m(1) = 1 \text{ より})$$

$$\Leftrightarrow d_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{m-2}{m} \left( d_n - \frac{1}{2} \right)$$

$e_n = d_n - \frac{1}{2}$  とする.

$$e_{n+1} = \frac{m-2}{m}e_n, \quad e_1 = d_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{2}$$

よって,

$$e_n = \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{m-2}{m} \right)^{n-1} = d_n - \frac{1}{2}$$

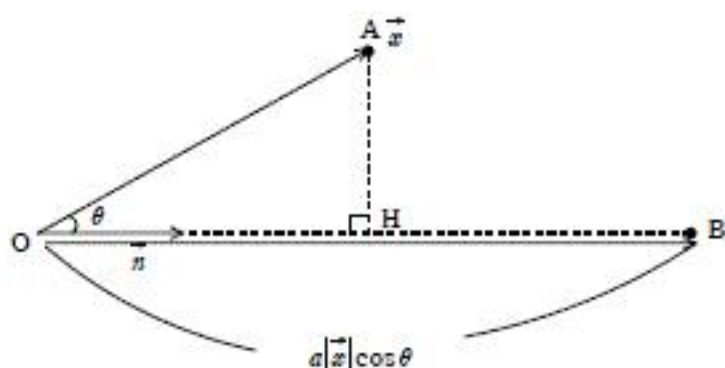
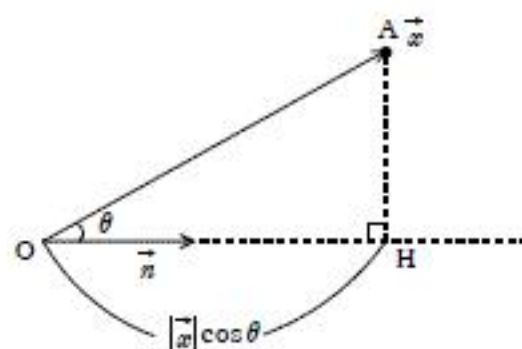
$$d_n = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{m-2}{m} \right)^{n-1} = \frac{k_m(n)}{m^n}$$

したがって  $k_m(n)$  は,

$$k_m(n) = \frac{m^n - (m-2)^n}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(1) \quad |\vec{n}| = 1$$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = |\vec{x}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \theta = |\vec{x}| \cdot \cos \theta = OH$$



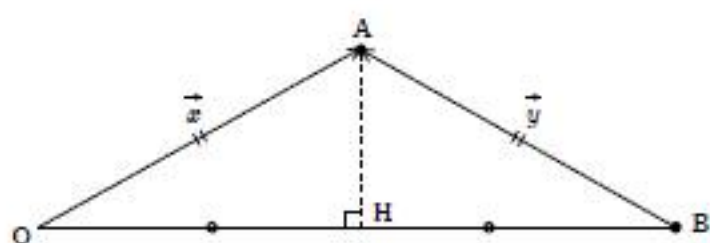
$OB = a OH$  であり, 上図において  $\overrightarrow{BA}$  が  $\vec{y}$  に対応する.

$$|\vec{x}| = |\vec{y}| \text{ のとき}$$

$\triangle AOB$  は二等辺三角形なので

$$OH = HB$$

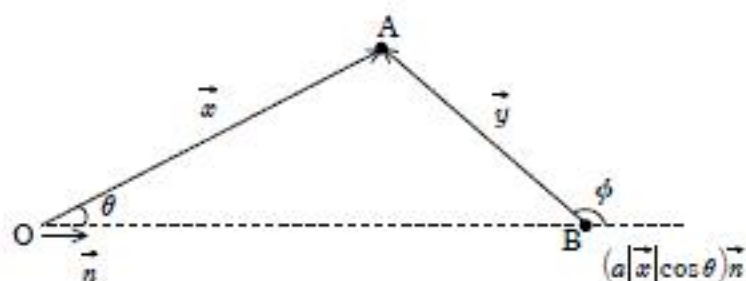
ゆえに,  $a = 2$



(証明終)

(2)  $\theta, \phi$  は  $|\vec{x}|$  の値によらないので

$|\vec{x}| = 1$  として一般性を失わない.



右図において  $AH = \sin \theta$

$\angle ABO = \alpha$  とすると

$$\alpha = 180^\circ - \phi$$

$$\frac{\sin \theta}{BH} = \tan \alpha$$

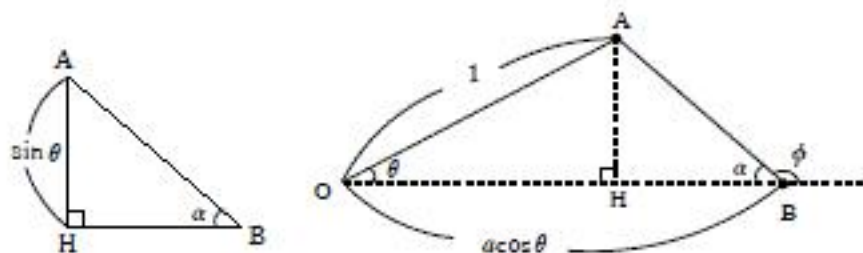
$$= \tan(180 - \phi) = -\tan \phi$$

$$\Leftrightarrow BH = -\frac{\sin \theta}{\tan \phi}$$

$$OB = OH + HB$$

$$\Leftrightarrow a \cos \theta = \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\tan \phi}$$

$$\text{すなわち, } \tan \phi = \frac{1}{(1-a)} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$



$$1 + \tan^2 \phi = \frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \frac{1}{(1-a)^2} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(1-a)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{(1-a)^2 \cos^2 \theta}$$

したがって,

$$\cos \phi = \frac{(1-a) \cos \theta}{\sqrt{1 + a^2 \cos^2 \theta - 2a \cos^2 \theta}} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(1) \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

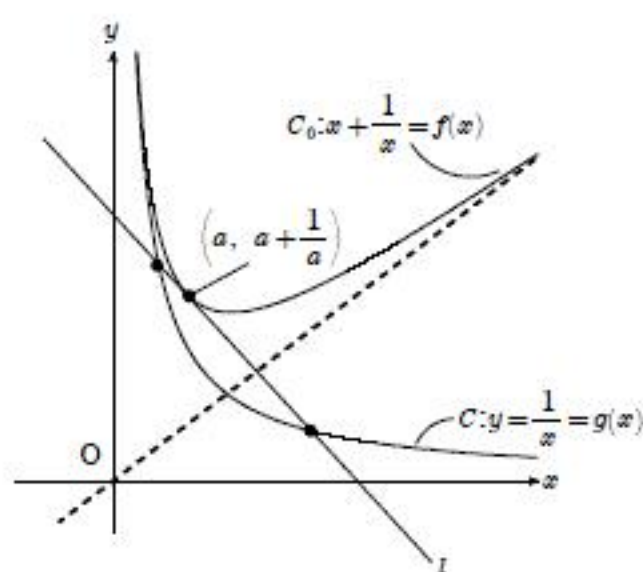
$$l \text{ の傾き : } 1 - \frac{1}{a^2}$$

$l$  が  $C$  と 2 点で交わるには,  $(l \text{ の傾き}) < 0$  であればよい.

$$1 - \frac{1}{a^2} < 0 \iff |a| < 1$$

$0 < a$  より, 求める範囲は

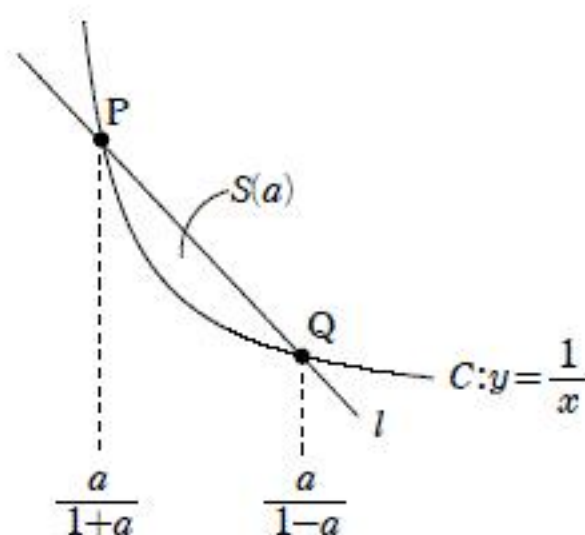
$$0 < a < 1 \quad \dots\dots (\text{答})$$



$$(2) \quad l: y - \left(a + \frac{1}{a}\right) = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)(x - a) \iff y = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a}$$

$$C \text{ と連立して } x = \frac{a}{1+a}, \frac{a}{1-a}$$

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{\frac{a}{1+a}}^{\frac{a}{1-a}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{a^2}\right)x + \frac{2}{a} - \frac{1}{x} \right\} dx \\ &= \left[ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) x^2 + \frac{2}{a} x - \log x \right]_{\frac{a}{1+a}}^{\frac{a}{1-a}} \\ &= \frac{2a}{1-a^2} + \log \frac{1-a}{1+a} \end{aligned}$$



$$(3) \quad S(a) < \frac{2a}{1-a^2} \text{ のとき}$$

$$0 < a < 1 \text{ より}$$

$$0 < \frac{1-a}{1+a} < 1$$

$$\log \frac{1-a}{1+a} < 0$$

$$\frac{2a}{1-a^2} - S(a) = -\log \frac{1-a}{1+a} > 0$$

$$\text{よって, } S(a) < \frac{2a}{1-a^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a^3}{1-a^2} < S(a) \text{ のとき}$$

$$S(a) - \frac{a^3}{1-a^2} = \frac{2a-a^3}{1-a^2} + \log \frac{1-a}{1+a} = h(a)$$

$$h'(a) = \frac{a^4+a^2}{(1-a^2)^2} > 0 \quad (0 < a < 1 \text{ より})$$

$$\text{また, } h(0) = 0$$

$$h(a) > 0$$

|         |   |     |   |
|---------|---|-----|---|
| $a$     | 0 | ... | 1 |
| $h'(a)$ | + | +   | + |
| $h(a)$  | 0 | ↗   | ↗ |

$$\text{よって, } \frac{a^3}{1-a^2} < S(a) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

したがって①, ②より,

$$\frac{a^3}{1-a^2} < S(a) < \frac{2a}{1-a^2} \quad \dots\dots (\text{答})$$