

1

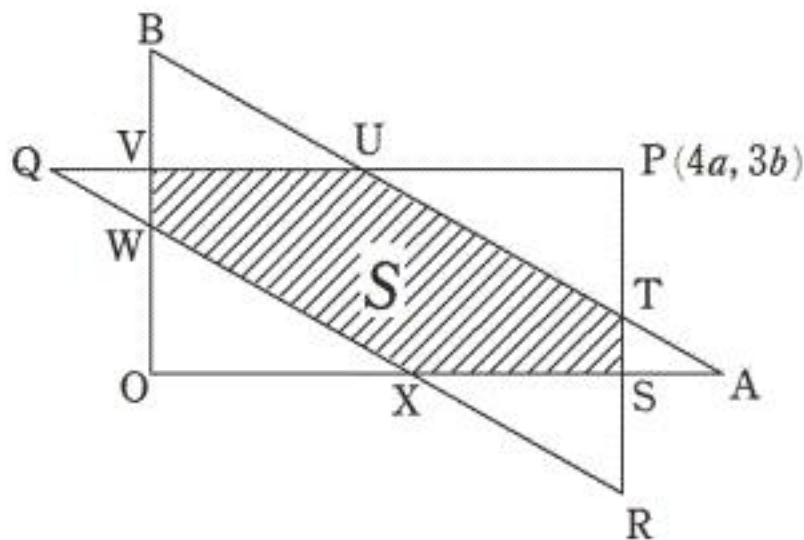
(1)	(ア)	$-n$
(2)	(イ)	$-\frac{11}{2}$
(3)	(ウ)	14
(4)	(エ)	6

- $$S_{\text{BVU}} = \frac{1}{2}(3-3b)(4-4b)$$

$$S_{\text{WOX}} = \frac{1}{2}(3a + 3b - 3)(4a + 4b - 4)$$

$$S_{TSA} = S_{WVQ} = \frac{1}{2}(3-3a)(4-4a)$$

$$S = S_{\text{OAB}} - (S_{\text{BVU}} + S_{\text{WOX}} + S_{\text{TSA}})$$

$$= -12(a^2 + b^2 + ab - 2a - 2b + 1) \dots\dots(\text{答})$$


- $$f(a, b) = a^2 + (b - 2)a + b^2 - 2b + 1$$

$$\begin{aligned} &= \left(a + \frac{b-2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 - b \\ &= \left(a + \frac{b-2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(b - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\left(\text{等号成立は } a=b=\frac{2}{3} \text{ のとき} \right)$$

$\max S$ は $\min f$ のときであるから

$$\max S = 4 \left(a = b = \frac{2}{3} \right) \dots\dots (\text{答})$$

(1) (ii) で $n=2015$ を代入して,

$$f(f(2015)+4)=f(4)=2015$$

したがって,

$$f(4)=2015 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $f(f(4)+4)=f(2019)=4$, $f(f(2019)+4)=f(8)=2019$

つまり,

$$f(4)=2015, \quad f(8)=2019$$

$f(2n) < f(2n+2)$ より,

$$f(6)=2016, 2017, 2018$$

のいずれかとなる.

$f(6)=2016$ のとき, $f(f(6)+4)=f(2020)=6$ となり, これは (iii) に反する.

同様に $f(6)=2018$ のときも不適. ゆえに,

$$f(6)=2017 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $f(a)=f(b)=c$ ($a \neq b$) とすると, $f(f(a)+4)=f(f(b)+4)=f(c+4)=a=b$ となり不適.

よって, $x \mapsto f(x)$ は 1 対 1 対応. $\cdots \cdots \textcircled{2}$

①より,

$$f(f(6)+4)=f(2021)=6$$

よって,

$$f(4n+1)=4n-2014$$

と推定される.

$n=k$ のとき, $f(4k+1)=4k-2014 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$ が成立すると仮定する.

$$f(f(4k+1)+4)=f((4k-2014)+4)=f(4k-2010) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

また(ii) より,

$$f(f(4k+1)+4)=4k+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④, ⑤より

$$f(f(4k-2010)+4)=f(4k+1+4)=f(4k+5)$$

$$f(f(4k-2010)+4)=4k-2010$$

ここで,

$$f(4k+5)=f(4(k+1)+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$4k-2010=4(k+1)-2014 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑥, ⑦より

$$f(4(k+1)+1)=4(k+1)-2014 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

よって, これは $n=k+1$ のときに成立することを表している

一方,

$$f(f(4k-2014)+4)=4k-2014$$

$$f(4k-2014)=4k-3$$

$$f(f(4k-3)+4)=4k-3$$

$$\therefore f(4k-3)=f(4(k-1)+1)=4(k-1)-2014 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑧, ⑨より全ての整数 n で③は成立する.

したがって,

$$f(4n+1)=4n-2014 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$