1.

(1)　$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$　　……（答）

$$\left(\begin{aligned}\text{（詳解）}\ \cos(2\theta+\theta) &= \cos 2\theta\cdot\cos\theta - \sin 2\theta\cdot\sin\theta \\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta \\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}\right)$$

(2)(ｉ) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{4}x$　（奇関数）　←原点対称

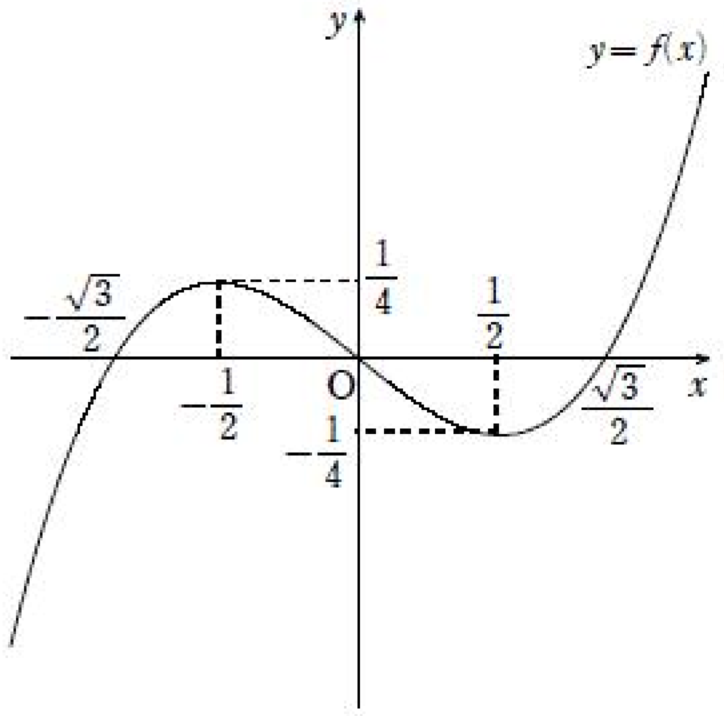
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - \frac{3}{4} \\ &= 3\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

増減表を描くと下記の通り

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(極大) $\frac{1}{4}$	↘	0	↘	(極小) $-\frac{1}{4}$	↗

$$\begin{cases}(\text{極大値}) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ (\text{極小値}) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}\end{cases}$$

グラフを描くと右図の通り

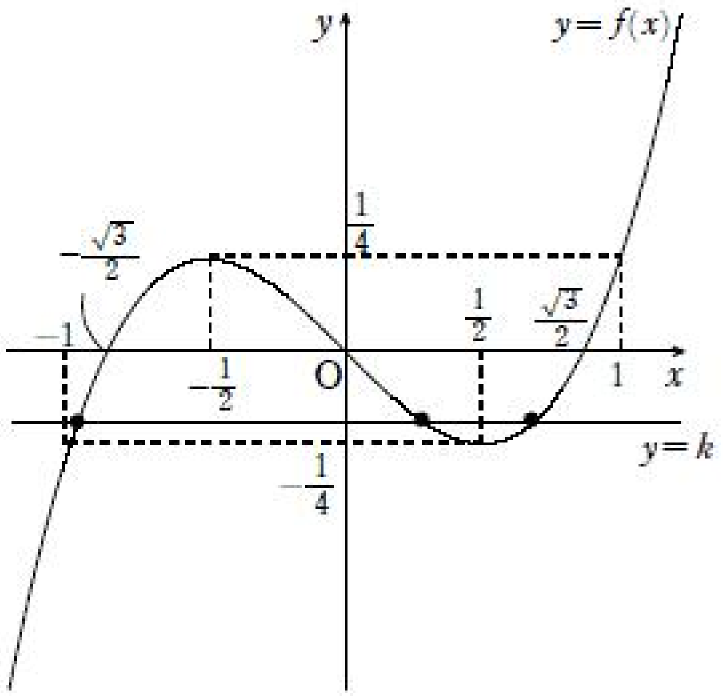


(ⅱ) 右図の $y=f(x)$ と $y=k$ のグラフより，

$-\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{1}{4}$　　（答）

共有点の x 座標のとる値の範囲は

$-1 \leqq x \leqq 1$　　（答）



(3)　(2)の(ⅱ)を用いると，

$x^3 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8} = 0$　$\left(\Longleftrightarrow x^3 - \dfrac{3}{4}x = \dfrac{1}{8}\right)$

は２関数 $\begin{cases} f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x \\ y = \frac{1}{8}\end{cases}$　の共有点の x 座標より，

３つの異なる実数解は全て $-1 \leqq x \leqq 1$ にある．

$x = \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とおくと，

$$\begin{aligned} &\cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta - \frac{1}{8} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{4}\cos 3\theta = \frac{1}{8} \\ \Longleftrightarrow\ &\cos 3\theta = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

((1)を利用)

ここで，$0 \leqq 3\theta \leqq 3\pi$ より　　$3\theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5}{3}\pi, \dfrac{7}{3}\pi$

ゆえに，$\theta = \dfrac{\pi}{9}, \dfrac{5}{9}\pi, \dfrac{7}{9}\pi$　　（答）

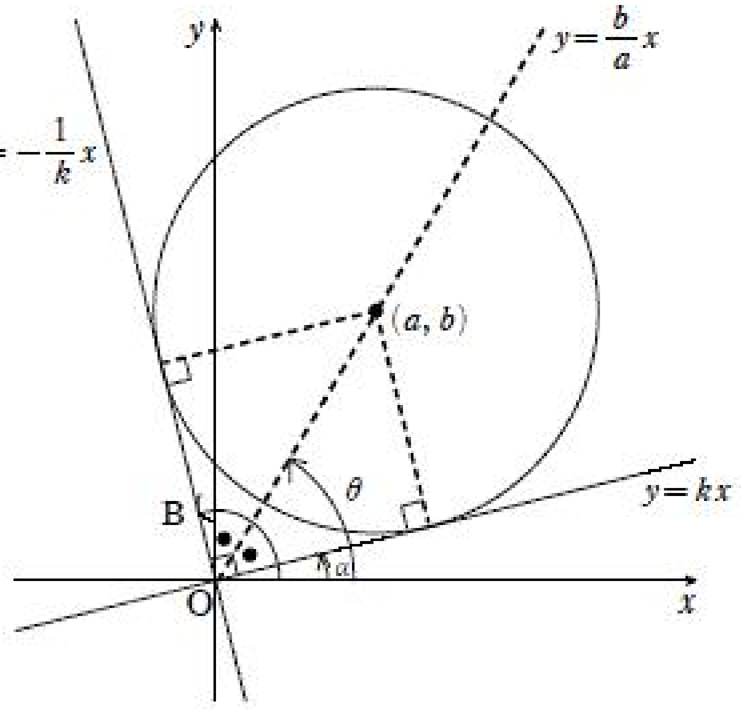
($0 \leqq \theta \leqq \pi$ をみたす)

2.

(1) $y=kx,\ y=-\dfrac{1}{k}x$ が x 軸の

正の方向となす角を各々 α,β とおく．

$$\begin{cases}\tan\alpha=k\\ \tan\beta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\dfrac{1}{\tan\alpha}=-\dfrac{1}{k} \quad\cdots\cdots①\end{cases}$$



右図のように角 θ を定めると，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\&=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha\cdot 1}\\&=\frac{k+1}{1-k} \quad (①より)\\&=\frac{b}{a}\end{aligned}$$

ゆえに，$\underline{\dfrac{b}{a}=\dfrac{1+k}{1-k}}$ （答）

(2) $\mathrm{O}(0,0)$ と (a,b) の距離は

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{1+k}{1-k}\right)^2a^2}=\sqrt{\frac{(1-k)^2+(1+k)^2}{(1-k)^2}}\,a=\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{1-k}a$$

したがって，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}=\underline{\dfrac{\sqrt{1+k^2}}{1-k}a}$ （答）

(3) (1)，(2)より，円Oの方程式を $k=\dfrac{1}{3}\ \left(b=2a,\ r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}a\right)$ を代入して表すと，

$$(x-a)^2+(y-2a)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}a\right)^2$$

ここで，(p,p) を代入

$$\begin{aligned}&(p-a)^2+(p-2a)^2=\frac{5}{2}a^2\\ \Longleftrightarrow\ &4p^2-12ap+5a^2=0\\ \Longleftrightarrow\ &(2p-5a)(2p-a)=0\end{aligned}$$

したがって，$p=\dfrac{5}{2}a,\ \dfrac{a}{2}\ \left(a=\dfrac{2}{5}p,\ a=2p\right)$

ゆえに，$\underline{(a,b)=\left(\dfrac{2}{5}p,\ \dfrac{4}{5}p\right),\ (2p,\ 4p)}$ （答）

$(p>0$ より，$a>0,\ b>0$ をみたす$)$

3.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2n+1)(2n+3)\ (n=1,2,3,\cdots)$ ……①

①で $n=1$ 代入　　$6a_1=-\dfrac{3\cdot5}{4}$　　すなわち $a_1=-\dfrac{5}{8}$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)(k+2)}{3^{k-1}}a_k=-\frac{1}{4}(2n-1)(2n+1)\ (n=2,3,4,\cdots)$ ……②

①−②より，

$$\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n-1}}a_n=-(2n+1)$$

$$\Longleftrightarrow a_n=-\frac{(2n+1)\cdot3^{n-1}}{(n+1)(n+2)}\ (n=2,3,4,\cdots)$$

以上より，

$$a_n=\begin{cases}-\dfrac{5}{8} & (n=1\ \text{のとき})\\[2mm] -\dfrac{(2n+1)\cdot3^{n-1}}{(n+1)(n+2)} & (n=2,3,4,\cdots\ \text{のとき})\end{cases}\quad(\text{答})$$

(2)(i)

$$S=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{n}{2(n+2)}\quad(\text{答})$$

(ii)　$(n\geqq2)$

$$Q=a_1+\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{(2k+1)\cdot3^{k-1}}{(k+1)(k+2)}\right\}+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{5}{8}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^{k-1}}{k+1}-\frac{3^k}{k+2}\right)$$
$$=-\frac{1}{8}+\left(\frac{3^0}{2}-\frac{3^1}{3}\right)+\left(\frac{3^1}{3}-\frac{3^2}{4}\right)+\left(\frac{3^2}{4}-\frac{3^3}{5}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{3^{n-1}}{n+1}-\frac{3^n}{n+2}\right)$$
$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3^n}{n+2}$$
$$=\frac{3}{8}-\frac{3^n}{n+2}\quad(\text{答})$$

$(n=2,3,4,\cdots$ だが，$n=1$ もみたすので，$n=1,2,3,\cdots)$